REVISTA INCAING
ISSN24489131

Diseño, modelado cinemático y construcción de un robot móvil omnidireccional, del salón de clase a su implementación

Yolanda Eugenia Márquez Gardea, Rafael Sandoval Rodríguez, Manuel Alejandro García González,
Edgar Trujillo Preciado, Rafael Ruiz Márquez.
yolanda.mg, rafael.sr, manuel.gg, edgar.tp, rafael.rm@chihuahua.tecnm.mx
Departamento de Eléctrica, Electrónica y Mecatrónica
Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua

Resumen – El presente trabajo muestra el resultado del proceso de diseño, modelado y construcción de un robot móvil omnidireccional. Partiendo de los conocimientos teóricos adquiridos en los cursos de Robótica y Modelado y Manufactura Asistida por Computadora en la carrera de Ingeniería Electrónica, el estudiante inicia con una lista de requisitos funcionales y dimensionales del dispositivo. Sigue a la parte de modelado usando un software para CAD/CAE y fabrica las piezas del robot usando impresión 3D. De acuerdo a los requisitos de movilidad y funcionalidad del robot, diseña una tarjeta de control usando un sistema embebido, actuadores y sensores para cumplir dichos requisitos. Posteriormente realiza el modelado cinemático del robot, para finalizar con la integración de todos los elementos y su prueba funcional.

Índice de Términos – Robótica móvil, diseño e impresión 3D, modelado cinemático, sistemas embebidos.

Abstract-
The present report shows the results of the process of design, modeling and construction of an omnidirectional mobile robot. Starting from the theoretical knowledge acquired in the courses of Robotics and Computer Aided Manufacturing and Modeling in the bachelors of Electronic Engineering, the student initiates with a list of functional requirements of the prototype. After that, the student obtains a model using CAD/CAE software and fabricates the pieces of the robot using a 3D printer. According with the mobility and functional requirements, the student designs a control board using embedded systems, actuators and sensors to fulfill those requirements. Along with the physical modeling, the student analyzes and obtains the kinematic model of the omnidirectional robot. Later integrates all the parts and performs some tests to validate the prototype.
Keywords – Mobile Robotics, design and 3D printing, kinematic Modeling, Embedded Systems.

I. INTRODUCCION

El presente trabajo plasma la experiencia de los estudiantes adquirida en el aula de clase, donde combinan los conocimientos teóricos de los cursos de Robótica y de Modelado y Manufactura Asistida por Computadora en el diseño, modelado y construcción de un robot omnidireccional. La combinación del análisis de los tópicos teóricos con la aplicación de estos en el diseño y construcción de prototipos ha resultado de gran beneficio en el afianzamiento de los temas propuestos en los programas de estudio de la carrera de Ingeniería Electrónica. En trabajos previos [1-4] se ha realizado esta práctica resultando de gran beneficio para los estudiantes, dado que algún tópico que no se entendió completamente en el salón de clase, este es revisado nuevamente en el proceso de su aplicación en el diseño del prototipo, reforzando su comprensión.

Aunque el modelo educativo que se sigue en la carrera de Ingeniería Electrónica de nuestro instituto no es el de Aprendizaje Basado en Proyectos, esta práctica se ha estado aplicando de manera particular en los cursos mencionados, obteniendo resultados muy satisfactorios. Tras terminar y probar el prototipo los estudiantes manifiestan mucha satisfacción de haber entendido y puesto en práctica los conocimientos teóricos en cada una de las etapas de desarrollo del proyecto, aumentando su autoestima y sentido de identidad con su carrera. Los pasos o etapas que se siguieron para el desarrollo del proyecto son muy similares a las recomendadas por la Secretaría de Educación Pública, tal y como se discute en [5]. En ese trabajo de investigación se recomienda que el docente debe motivar al estudiante a "transitar de la enseñanza al aprendizaje", y efectivamente la interacción estudiante-maestro en las etapas del proyecto fue motivante para nuestros estudiantes. En las siguientes secciones se presenta de manera detallada el proceso de diseño y construcción del prototipo. En la sección II se revisan los requisitos de funcionalidad del robot, tales como movilidad, dimensiones, y de programación, finalizando con el diseño e impresión en 3D del robot. En la sección III se presenta el diseño de la tarjeta de control, con el CPU, los actuadores de sus ruedas y los manejadores de potencia. En la sección IV se presenta el modelado cinemático del robot móvil, desde las restricciones de las ruedas, las restricciones impuestas al chasis, y finalmente la obtención de las ecuaciones cinemáticas, directa e inversa. En la sección V se discuten los resultados de pruebas del prototipo, y finalmente en la sección VI se presentan las conclusiones del proyecto.

II. REQUERIMIENTOS Y ESPECIFICACIONES DEL ROBOT

A. Requerimientos de movilidad

Se planteo la consigna de diseñar y fabricar una plataforma móvil que cumpliera con los siguientes requisitos,

- Que el robot móvil sea capaz de hacer movimientos en el plano X-Y, rotaciones sobre el eje Z, así como también, combinaciones de movimientos.
- Que la plataforma móvil fuese capaz de desplazarse en cualquier dirección, es decir, que la configuración del chasis partiendo desde cualquier punto nos permita generar un perfil de velocidad con cualquier resultante en el plano.
- Control independiente de los actuadores con un control de lazo cerrado para control de velocidad.

Como parte de los tópicos que se cubren en el curso de Robótica, se revisan diferentes configuraciones de chasis y ruedas en robots móviles, tales como manejo diferencial (*differential driving*), sistema *Ackerman*, y omnidireccional con ruedas suecas. Para este proyecto se seleccionó un robot omnidireccional con tres ruedas suecas con ángulo de 90° en sus rodillos. La disposición de las ruedas en el chasis es de 120° de separación entre ellas. Para obtener movilidad omnidireccional, cada rueda es actuada con un servomotor con control independiente. De esta manera, una vez calculado el perfil de velocidad para cada rueda, acorde a la trayectoria que se desea que el robot realice, el CPU se encarga del control independiente de cada rueda enviando la señal correspondiente a cada manejador de potencia.

B. Requerimientos de tamaño

Dado que se trata de un robot experimental para probar algoritmos de navegación, no es necesario que tenga un tamaño grande, y para tener buena movilidad y espacio en las áreas de laboratorios se eligió un tamaño pequeño. Además, tomando en cuenta que la gran mayoría de impresoras 3D cuentan con una cama de 250mm por 250mm se consideró diseñar un chasis que se adhiera a estas restricciones para evitar posibles complicaciones mecánicas. Las dimensiones finales del chasis se limitaron a un cuadrado de 213mm por 213mm.

C. Estructura propuesta

Se propuso una configuración de chasis modular con la finalidad de agregar aditamentos posteriores en caso de que así se requiera. El robot móvil, por lo tanto, cuenta con un total de 4 piezas modulares que nos permiten montar componentes. El diseño del chasis donde se montan los motores se implementó como se muestra en la Figura 1. Como se puede apreciar en la Figura 1, se colocaron tres postes guía para sujetar los siguientes soportes. La Figura 2 muestra el soporte para la batería. La Figura 3 muestra la tablilla de control montada sobre su soporte y colocada sobre el chasis. En la versión actual del robot no se cuenta con un LIDAR, sin embargo, se considerará la opción para desarrollos futuros. La Figura 4 muestra el sensor LIDAR sobre su soporte y montado sobre el chasis. En las etapas de diseño se considero la posibilidad de utilizar ruedas omnidireccionales comerciales para simplificar el diseño, sin embargo, la mala calidad de estas y la ausencia de bujes en cada uno de los rodillos nos llevo a desarrollar nuestra propia versión. La Figura 5 muestra un corte transversal del sistema del rodillo y su buje, mientras que la Figura 6 muestra una vista isométrica del conjunto.

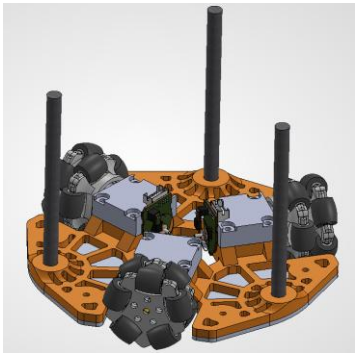

Fig. 1. Chasis para el montaje de los motores.

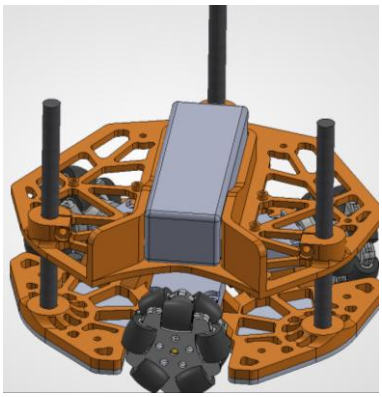

Fig. 2. Soporte de la batería montado sobre el chasis.

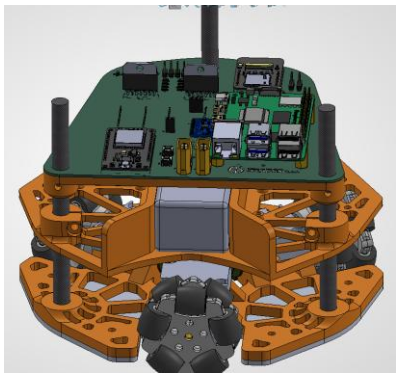

Fig. 3. Tablilla de control montada sobre su soporte y montada en el chasis.

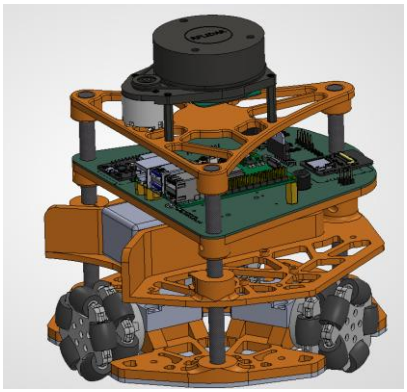

Fig. 4. Sensor LIDAR con su soporte y montado sobre el chasis.

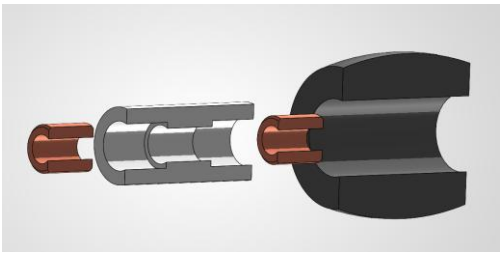

Fig. 5. Vista de sección transversal de un rodillo y su buje.

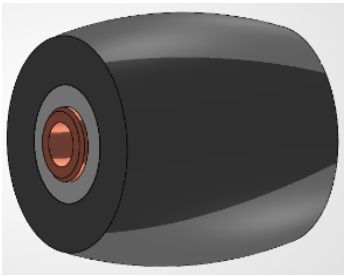

Fig. 6. Vista isométrica de un rodillo.

Para la construcción de cada rueda sueca se utilizaron un total de diez rodillos, dispuestos de cinco en un soporte y cinco en un segundo soporte con un desfasamiento de 36 grados para que en todo momento haya un rodillo en contacto con el piso, tal como se aprecia en la Figura 7.

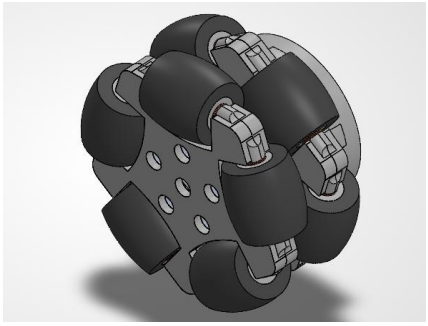

Fig. 7. Vista isométrica de una rueda ensamblada.

III. Diseño de la tarjeta de control

Se decidió utilizar un ESP32 como microcontrolador principal por la facilidad de uso en aplicaciones de IoT y su robustez de aplicación en sistemas de control, dado que cuenta con un procesador de doble núcleo a 32 bits. Además que se tiene experiencia previa con este procesador ya que se utiliza en otros curso de la carrera.

El diseño de la PCB se realizó en KiCAD, principalmente porque es un software de uso libre y cuenta con la suficiente capacidad para nuestra aplicación. En la tabilla se adicionan los manejadores de potencia para los motores, una pantalla OLED para como interfaz gráfica y demás circuitería para su funcionamiento. En la Figura 8 se muestra la tablilla de control.

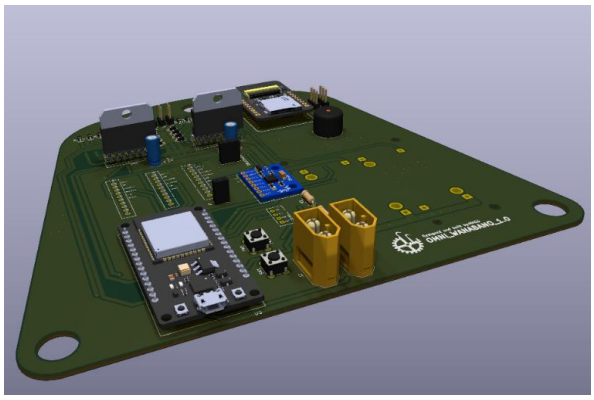

Fig. 8. Vista isométrica de la tablilla de control.

IV. Modelado cinemático

Para el modelado del robot consideramos solo el modelo cinemático, dado que el peso y dimensiones del robot son pequeñas, además de que las ruedas son actuadas con servomotores con caja de trasmisión de engranes con una relación de trasmisión muy grande tal que atenúan fuertemente las dinámicas del robot. Partimos del análisis de las restricciones cinemáticas de las ruedas, posteriormente integramos las ruedas al chasis del robot, y finalizamos con la obtención de las ecuaciones para el modelado cinemático directo e inverso.

A. Restricciones de las ruedas sueca

Como se presenta en [6], las ruedas suecas o mecanum no tienen un eje vertical de rotación, sin embargo se pueden mover omnidireccionalmente como una rueda cáster. Esto es posible adicionando un grado de libertad a la rueda estándar fija. Las ruedas suecas consisten de una rueda estándar fija con rodillos colocados al perímetro de la rueda con ejes que son anti-paralelos al eje principal de la rueda fija. El valor del ángulo γ entre los ejes de los rodillos y el eje principal son variables, pero los más comunes comercialmente son de 45° y de 90°. La Figura 9 muestra las componentes de movimiento sobre el plano de la rueda.

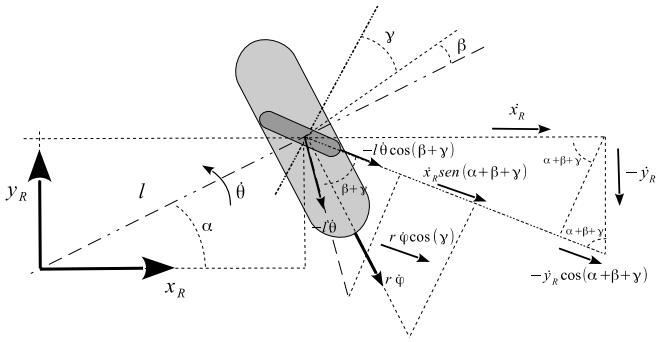

Fig. 9. Componentes de movimiento sobre el plano de una rueda sueca.

El eje para análisis del movimiento sobre el plano de la rueda se desplaza un ángulo γ para coincidir con el eje del rodillo, dado que sobre este eje el libre movimiento del rodillo no tiene efecto, y el movimiento se debe al giro de la rueda sobre su eje principal. De esta manera las componentes de movimiento se relacionan con la siguiente ecuación,

$$\dot{x}_R sen(\alpha+\beta+\gamma) - \dot{y}_R \cos(\alpha+\beta+\gamma) - l\dot{\theta}\cos(\beta+\gamma) = r\dot{\varphi}\cos(\gamma) \quad (1)$$

En forma matricial,

$$[sen(\alpha+\beta+\gamma) - \cos(\alpha+\beta+\gamma) - l\cos(\beta+\gamma)]\begin{bmatrix}\dot{x}_R\\ \dot{y}_R\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = r\dot{\varphi}\cos(\gamma) \quad (2)$$

Las componentes de movimiento ortogonal al plano de la rueda se muestran en la Figura 10.

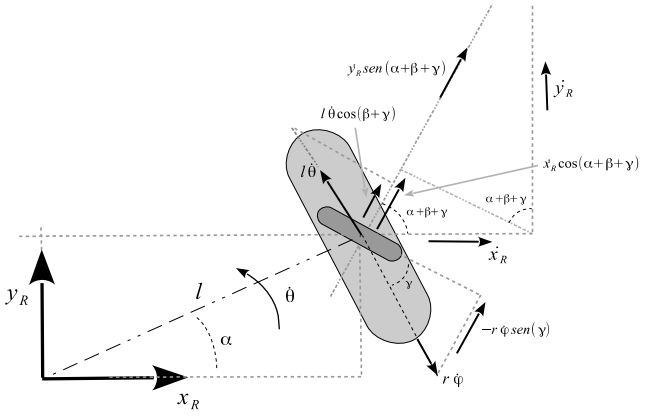

Fig. 10. Componentes de movimiento ortogonal al plano de una rueda sueca.

En este caso el eje de análisis es ortogonal al eje de los rodillos, y sobre este eje el movimiento del rodillo es libre, eliminando cualquier deslizamiento. Al giro libre del rodillo se resta una componente del giro de la rueda sobre su eje principal, así la ecuación de movimiento ortogonal al plano de la rueda resulta,

$$\dot{x}_R cos(\alpha+\beta+\gamma) + \dot{y}_R \,\text{sen}(\alpha+\beta+\gamma) + l\dot{\theta}\,\text{sen}(\beta+\gamma) = r_{rs}\,\dot{\varphi}_{rs} - r\dot{\varphi}\,\text{sen}(\gamma) \quad (3)$$

En forma matricial,

$$[cos(\alpha+\beta+\gamma) + \text{sen}(\alpha+\beta+\gamma) + l\,\text{sen}(\beta+\gamma)]\begin{bmatrix}\dot{x}_R\\ \dot{y}_R\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = r_{rs}\,\dot{\varphi}_{rs} - r\dot{\varphi}\,\text{sen}(\gamma) \quad (4)$$

B. Integración de las restricciones de las ruedas al chasis del robot.

Dado un robot móvil con N ruedas, podemos calcular las restricciones cinemáticas del chasis del robot. La idea clave es combinar las restricciones que cada rueda impone sobre el robot, basada en la posición de la rueda sobre el chasis. Las ruedas cáster, suecas y esféricas no imponen restricción sobre el movimiento del robot, por tanto solo incluimos o consideramos las ruedas fijas y direccionables. Supongamos que el robot tiene N ruedas, N_f ruedas fijas y N_s ruedas direccionables. Usamos $\beta_s(t)$ para denotar los ángulos variables de las N_s ruedas direccionables y β_f para los ángulos fijos de las N_f ruedas fijas. Los ángulos de rodada de las ruedas los denotamos $\varphi_f(t)$ y $\varphi_s(t)$, y en una matriz como $\varphi(t)$.

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix}\varphi_f(t)\\ \varphi_s(t)\end{bmatrix} \quad (5)$$

Las restricciones de rodada de todas las ruedas pueden ser agrupadas en una sola expresión

$$J_1(\beta_s)\begin{bmatrix}\dot{x}_R(t)\\ \dot{y}_R(t)\\ \dot{\theta}_R(t)\end{bmatrix} - J_2\dot{\varphi}(t) = 0 \quad (6)$$

Donde J_2 es una matriz diagonal constante de NxN cuyas entradas son los radios r de todas las ruedas. $J_1(\beta_s)$ denota una matriz con proyecciones para todas las ruedas hacia sus movimientos a lo largo de sus planos de rodada individuales.

$$J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix}J_{1f}\\ J_{1s}(\beta(t))\end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde J_{1f} es fijo e incluye los N_f x 3 términos de las restricciones de rodada para las ruedas fijas. $J_{1s}(\beta(t))$ es una matriz de N_s x 3 e incluye las restricciones de rodada de las ruedas direccionables y es función de $\beta(t)$. Usamos la misma técnica para agrupar las restricciones de

deslizamiento lateral a todas las ruedas en una sola expresión.

$$C_1(\beta_s)\begin{bmatrix}\dot{x}_R(t)\\ \dot{y}_R(t)\\ \dot{\theta}_R(t)\end{bmatrix}=0 \tag{8}$$

con

$$C_1(\beta_s)=\begin{bmatrix}C_{1f}\\ C_{1s}(\beta(t))\end{bmatrix} \tag{9}$$

Donde C_{1f} y C_{1s} son matrices de N_f x 3 y N_s x 3 cuyos renglones son los tres términos de la matriz en la ecuación 2, es decir, $[sen(\alpha+\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)-l\cos(\beta+\gamma)]$.

C. Aplicación de las restricciones de las ruedas a un chasis con 3 ruedas suecas.

Considerando el robot omnidireccional mostrado en la Figura 11, donde se usan ruedas suecas (mecanum) a 90°, con los ejes de sus rodillos perpendiculares al eje principal de la rueda.

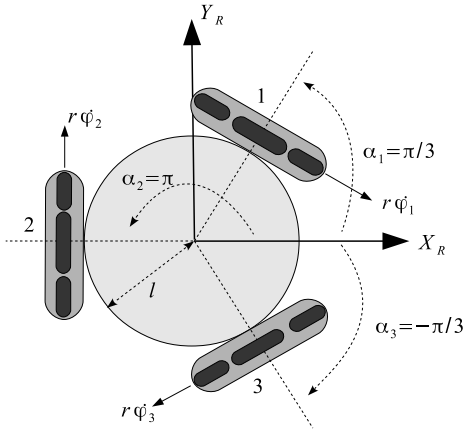

Fig. 11. Robot Omnidireccional con tres ruedas suecas a 90°

Consideramos la distancia de cada rueda al origen del sistema coordenado del robot igual a l, en nuestro robot $l = 10cm$ y el radio de cada rueda igual a $r = 3.05\ cm$. Los parámetros de las ruedas son $\alpha_1=\frac{\pi}{3}\ rad$ $\alpha_2=\pi\ rad$, y $\alpha_3=-\frac{\pi}{3}\ rad$. Se asume el ángulo de orientación $\beta=0$ para todas las ruedas ya que todas están dispuestas de manera tangente al chasis del robot como se aprecia en la Figura 3. Así mismo, de la Figura 3, podemos ver que el valor del ángulo de los rodillos para todas las ruedas es $\gamma=0$. De esta manera la expresión $J_1(\beta_s)$ en la Ecuación 7 se reduce a $J_{1f}=J_1$ y sustituyendo las restricciones de cada rueda, $[sen(\alpha+\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)-l\cos(\beta+\gamma)]$, tenemos

$$J_1=\begin{bmatrix}sen(\alpha_1) & -\cos(\alpha_1) & -l\\ sen(\alpha_2) & -\cos(\alpha_2) & -l\\ sen(\alpha_3) & -\cos(\alpha_3) & -l\end{bmatrix} \tag{10}$$

sustituyendo los correspondientes valores de α

$$J_1=\begin{bmatrix}sen\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -l\\ sen(\pi) & -\cos(\pi) & -l\\ sen\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -l\end{bmatrix} \tag{11}$$

Simplificando,

$$J_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l\\ 0 & 1 & -l\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l\end{bmatrix} \tag{12}$$

Para este robot solo consideramos el movimiento en el plano de la rueda. Con las tres restricciones de movimiento en los planos de las ruedas tenemos que J_1 es una matriz cuadrada, y así podemos establecer la relación entre las velocidades en el sistema coordenado del robot con las velocidades de las ruedas. Sustituyendo entonces la Ecuación 12 en la Ecuación 6 resulta,

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l\\ 0 & 1 & -l\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_R(t)\\ \dot{y}_R(t)\\ \dot{\theta}_R(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1(t)\\ \dot{\varphi}_2(t)\\ \dot{\varphi}_3(t)\end{bmatrix}=0 \tag{13}$$

Resolviendo para las velocidades de las ruedas tenemos,

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1(t)\\ \dot{\varphi}_2(t)\\ \dot{\varphi}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{r} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{r} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l\\ 0 & 1 & -l\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_R(t)\\ \dot{y}_R(t)\\ \dot{\theta}_R(t)\end{bmatrix} \tag{14}$$

Simplificando la Ecuación 14, tenemos

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1(t)\\ \dot{\varphi}_2(t)\\ \dot{\varphi}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2r} & -\frac{1}{2r} & -\frac{l}{r}\\ 0 & \frac{1}{r} & -\frac{l}{r}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} & -\frac{1}{2r} & -\frac{l}{r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_R(t)\\ \dot{y}_R(t)\\ \dot{\theta}_R(t)\end{bmatrix} \tag{15}$$

La Ecuación 15 nos muestra la relación entre las velocidades de las ruedas del robot y las velocidades a lo largo de los ejes del sistema coordenado del robot. Sin embargo nos interesa el movimiento del robot en un espacio de trabajo, en la siguiente sección analizamos esta situación.

D. Movimiento del robot omnidireccional sobre un sistema de referencia global.

Para resolver tareas asignadas, el robot móvil debe moverse en un espacio de trabajo, y este espacio puede definirse mediante un sistema coordenado global en dos dimensiones. La Figura 12 muestra al robot móvil en un espacio de trabajo enmarcado por un sistema coordenado $X_G - Y_G$,

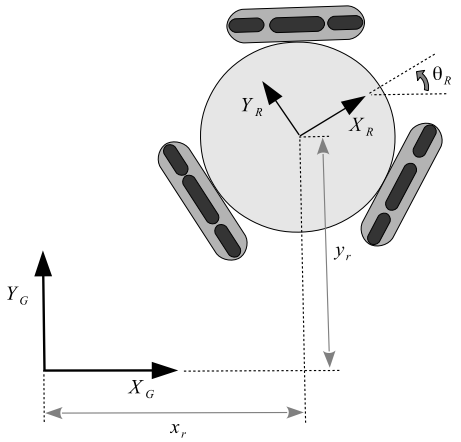

Fig. 12. Robot Omnidireccional en el sistema de referencia global.

Las velocidades a lo largo de los ejes del sistema global como función de las velocidades en los ejes del robot se pueden obtener usando la matriz de rotación fundamental mostrada en la Ecuación 16,

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_G(t)\\ \dot{Y}_G(t)\\ \dot{\theta}_G(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta_R(t) & -sen\theta_R(t) & 0\\ sen\theta_R(t) & cos\theta_R(t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_R(t)\\ \dot{y}_R(t)\\ \dot{\theta}_R(t)\end{bmatrix} \quad (16)$$

La relación inversa se muestra en la Ecuación 17,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_R(t)\\ \dot{y}_R(t)\\ \dot{\theta}_R(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\theta_R(t) & sen\theta_R(t) & 0\\ -sen\theta_R(t) & cos\theta_R(t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{X}_G(t)\\ \dot{Y}_G(t)\\ \dot{\theta}_G(t)\end{bmatrix} \quad (17)$$

Como podemos ver en la Ecuación 16, la velocidad angular del robot en el sistema de referencia global, $\dot{\theta}_G(t)$, es igual a la velocidad angular del robot respecto de su propio sistema coordenado, $\dot{\theta}_R(t)$, por tanto podemos simplificar el término a $\dot{\theta}_G(t) = \dot{\theta}_R(t) = \dot{\theta}(t)$. Mientras que el término $\theta_R(t)$, representa la orientación del sistema coordenado del robot respecto del sistema coordenado global y es el ángulo entre el eje x_R del robot y el eje X_G del sistema global medido en sentido antihorario. Para simplificar vamos a denotar el término como $\theta(t)$.

Para encontrar la relación entre la velocidad de las ruedas y el desplazamiento del robot a lo largo de los ejes del sistema coordenado global sustituimos la parte derecha de la Ecuación 17 en la Ecuación 13, y resolviendo para las velocidades en el sistema coordenado global obtenemos la Ecuación 18. Cabe notar que se abreviaron algunas expresiones para hacer la ecuación mas legible. En este caso $C\theta = cos\theta(t)$, $S\theta = sen\theta(t)$, y $\dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_i(t)$.

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_G(t)\\ \dot{Y}_G(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{rC\theta}{\sqrt{3}}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) + \frac{rS\theta}{3}(\dot{\varphi}_1 - 2\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)\\ \frac{rS\theta}{\sqrt{3}}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3) - \frac{rC\theta}{3}(\dot{\varphi}_1 - 2\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)\\ -\frac{r}{3l}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3)\end{bmatrix} \quad (18)$$

La ecuación 18 nos representa el modelo cinemático directo del robot omnidireccional donde las velocidades a lo largo de los ejes del sistema coordenado global quedan como función de las velocidades de las ruedas del robot. Por otra parte, si en la sustitución anterior, resolvemos para las velocidades de las ruedas tenemos,

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1(t)\\ \dot{\varphi}_2(t)\\ \dot{\varphi}_3(t)\end{bmatrix} = \quad (19)$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2r}(C\theta\dot{X}_G + S\theta\dot{Y}_G) - \frac{1}{2r}(-S\theta\dot{X}_G + C\theta\dot{Y}_G) - \frac{l\dot{\theta}}{r}\\ \frac{1}{r}(-S\theta\dot{X}_G + C\theta\dot{Y}_G) - \frac{l\dot{\theta}}{r}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2r}(C\theta\dot{X}_G + S\theta\dot{Y}_G) - \frac{1}{2r}(-S\theta\dot{X}_G + C\theta\dot{Y}_G) - \frac{l\dot{\theta}}{r}\end{bmatrix}$$

La Ecuación 19 representa la cinemática inversa, en este caso las velocidades de las ruedas quedan como función de las velocidades deseadas a lo largo de los ejes del sistema coordenado global.

V. PRUEBAS Y RESULTADOS

Para probar el modelo cinemático del robot se realizaron diferentes simulaciones de trayectorias utilizado Python. Por limitaciones de espacio se muestra aquí solo una simulación de la generación de la trayectoria que se muestra en la Figura 13.

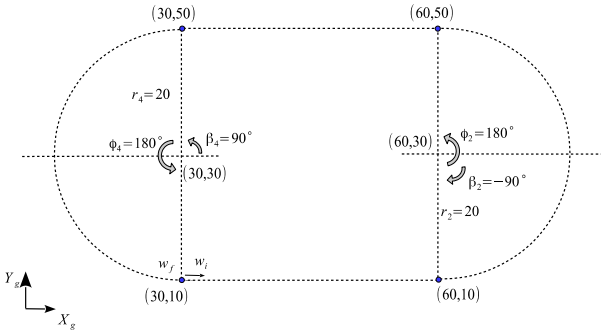

Fig. 13. Trayectoria de prueba para la validación del modelo cinemático.

El punto de partida del robot se denota con w_i y tiene coordenadas (30,10). La primer sección consiste de una línea recta que va del punto w_i al punto de coordenadas (60,10). La segunda sección es un semicírculo de radio $r_2 = 20$, con

coordenadas de centro (60,30), ángulo inicial $\beta_2 = -90°$, y ángulo de recorrido $\emptyset_2 = 180°$. La tercer sección es una línea recta que va del punto (60,50) al punto (30,50). Finalmente, la última sección es un semicírculo de radio $r_4 = 20$, con coordenadas de centro (30,30), ángulo inicial $\beta_4 = 90°$, y ángulo de recorrido $\emptyset_4 = 180°$. El perfil de velocidad que debe describir el robot para completar la trayectoria es de tipo trapezoidal, como se muestra en la Figura 14. El robot parte de velocidad cero y gradualmente alcanza una velocidad v_c que mantiene constante durante un periodo de tiempo antes de empezar a desacelerar hasta velocidad cero al final de la trayectoria.

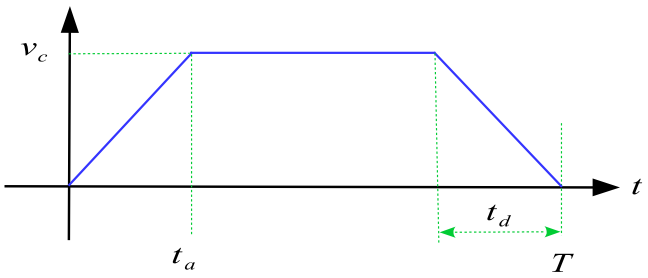

Fig. 14. Perfil de velocidad trapezoidal para el robot omnidireccional.

Para esta simulación se eligió un tiempo de aceleración $t_a = 3\ seg$, un tiempo de desaceleración $t_d = 3\ seg$, y una velocidad constante $v_c = 5\ cm/seg$. Utilizando estos parámetros del robot, la descripción previa de la trayectoria, y aplicando esta información en las Ecuaciones 19 a la 49, presentadas en [4] obtenemos las velocidades del robot móvil con referencia a los ejes del sistema coordenado global, y son mostradas en la Figura 15,

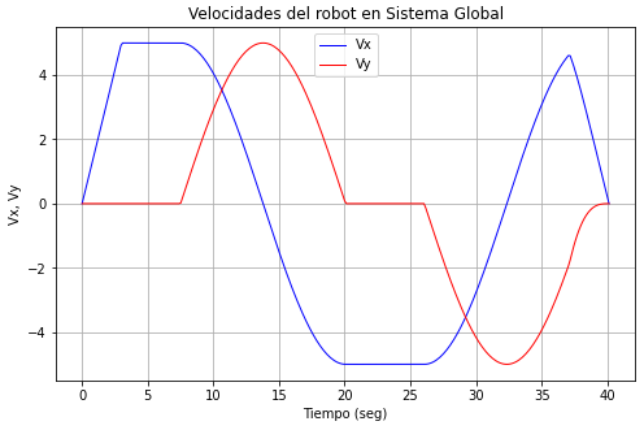

Fig. 15. Velocidades del robot sobre los ejes del sistema global.

En la descripción de la trayectoria consideramos que la orientación del robot es tal que su eje X_R es siempre perpendicular o tangencial a la trayectoria. La gráfica del ángulo de orientación del robot con respecto al tiempo se muestra en la Figura16,

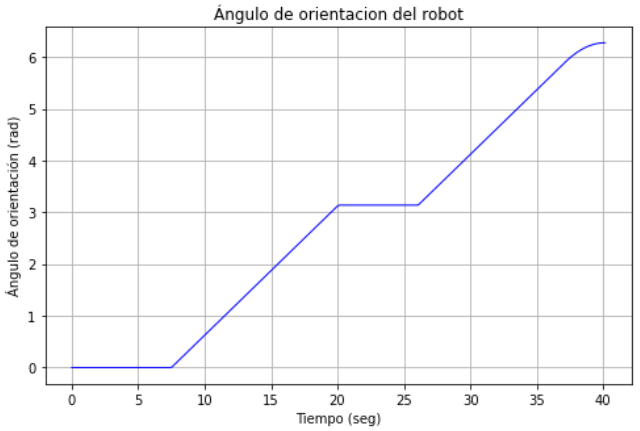

Fig. 16. Ángulo de orientación del robot sobre los ejes del sistema global.

Derivando con respecto al tiempo el ángulo de orientación del robot obtenemos la velocidad angular del robot y esta se muestra en la Figura 17.

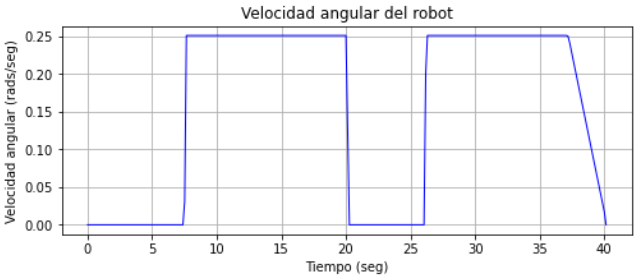

Fig. 17. Velocidad del ángulo de orientación del robot sobre los ejes del sistema global.

Aplicando estas velocidades en la Ecuación 19 obtenemos las velocidades de las ruedas, y estas son mostradas en la Figura 18.

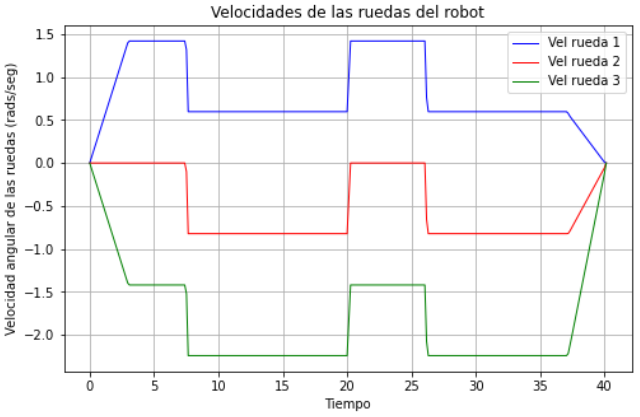

Fig. 18. Velocidades angulares de las ruedas del robot sobre los ejes del sistema global.

Interpretando la gráfica de velocidades de las ruedas podemos observar que durante los segmentos de línea recta, la velocidad en la rueda 2 es cero debido a que su orientación es perpendicular a la dirección de avance, y sus rodillos transversales giran libremente para no ofrecer resistencia al movimiento del robot, solo las ruedas 1 y 3 aportan movimiento. Durante los primeros tres segundos, que es el

periodo de aceleración, las velocidades de las ruedas 1 y 3 parten de cero hasta alcanzar una velocidad constante, la rueda 1 en sentido positivo y la rueda 3 e sentido negativo. Algo similar ocurre durante los últimos tres segundos que es el periodo de desaceleración. Durante las curvas las tres ruedas aportan movimiento. La rueda 3, que en este caso es la rueda exterior a la trayectoria, aporta la mayor velocidad para provocar la rotación o movimiento angular del robot. En estos casos la rueda 2 también aporta movimiento para apoyar a la rueda 3 en el movimiento angular del robot.

Para validar los modelos cinemáticos, directo e inverso, si aplicamos las velocidades de las ruedas mostradas en la Figura 18 en la Ecuación 18, debemos obtener las velocidades originales o iniciales del robot sobre los ejes del sistema global, tal como se muestra en la Figura 15. Realizando esta operación efectivamente obtenemos las velocidades originales, como se muestra en la Figura 19.

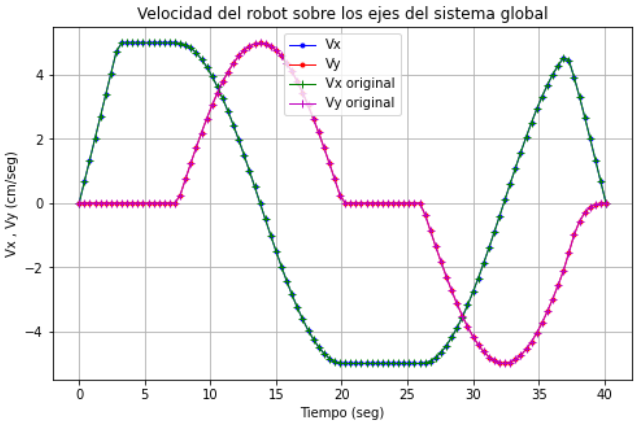

Fig. 19. Velocidades originales del robot, y velocidades calculadas del robot sobre los ejes del sistema global.

De la Figura 19 podemos observar el traslape entre las velocidades originales del robot especificadas para la trayectoria y las velocidades calculadas usando ambos modelos cinemáticos. Esto nos permitió validar nuestros modelos en las Ecuaciones 18 y 19.

A manera de conclusión, la experiencia adquirida por los estudiantes al realizar este proyecto fue muy enriquecedora, puesto que transitaron todo el proceso desde la concepción de la idea del prototipo, sus aspectos funcionales, la propuesta de diseños, su impresión 3D, ensamble, prueba y validación de los modelos matemáticos. Las discusiones generadas, el análisis y defensa de sus propuestas les fortaleció su habilidades blandas en cuanto a comunicación, trabajo en equipo y liderazgo. Además, como resultado de este ejercicio queda un prototipo funcional que sirve como infraestructura para la validación de algoritmos de control.

Reconocimiento

Si bien solo se lista como coautor al estudiante líder del equipo de trabajo, se hace el reconocimiento a los demás estudiantes participantes.

Referencias

[1] Márquez Gardea, Y. E., Sandoval Rodríguez, R., & Loya Gutiérrez, D. (2024). Diseño de brazo robótico de 6 articulaciones impreso en 3D. *Investigación Y Ciencia Aplicada a La Ingeniería*, *7*(41), 51–58. Recuperado a partir de https://ojsincaing.com.mx/index.php/ediciones/article/view/289.

[2] Sandoval Rodríguez, R., & Márquez Gardea, Y. E. (2024). Interfaz Gráfica de Usuario en LabView® para la Generación de Trayectorias en Robótica. *Investigación Y Ciencia Aplicada a La Ingeniería*, *7*(41), 01–12. Recuperado a partir de https://ojsincaing.com.mx/index.php/ediciones/article/view/273.

[3] Márquez Gardea, Y. E., & Sandoval Rodríguez, R. (2023). Diseño de Transmisión Armónica para brazo robótico impreso en 3D. *Investigación Y Ciencia Aplicada a La Ingeniería*, *6*(40), 06–13. Recuperado a partir de https://ojsincaing.com.mx/index.php/ediciones/article/view/272.

[4] Sandoval Rodríguez, R., & Márquez Gardea, Y. E. (2023). Diseño y Simulación de Funciones para la Generación de Trayectorias en 2D para su Aplicación con Robots Manipuladores. *Investigación Y Ciencia Aplicada a La Ingeniería*, *6*(38), 36–47. Recuperado a partir de https://ojsincaing.com.mx/index.php/ediciones/article/view/261.

[5] Jiménez Cisneros, M. del C., Romero Valencia, M. E. ., Sánchez Espinoza, P., Cisneros, M. del S. ., & González Vázquez, L. G. (2024). Etapas para considerar en una planeación de Aprendizaje Basado en Proyectos. *Investigación Y Ciencia Aplicada a La Ingeniería*, *7*(45). Recuperado a partir de https://ojsincaing.com.mx/index.php/ediciones/article/view/357.

[6] Siegwart R., Nourbakhsh I.R., and Scaramuzza D., Introduction to Autonomus Mobile Robots, The MIT Press, 2011. ISBN 978-0-262-01535-6.

Yolanda Eugenia Márquez Gardea es docente de tiempo completo del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica del Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua. Es egresada de la carrera de Ingeniería Industrial en Electrónica por este mismo instituto. Cuenta con la Maestría en Ingeniería de Manufactura por la Universidad de Nuevo México, E.U.A. Su línea de trabajo es Diseño, Ingeniería y Manufactura Asistida por Computadora (CAD/CAE/CAM).

Rafael Sandoval Rodríguez es docente de tiempo completo del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica del Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua. Es egresado de la carrera de Ingeniería Industrial en Electrónica y de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica del mismo instituto. Cuenta con un Doctorado en Filosofía (Ph.D.) por la Universidad de Nuevo México, E.U.A. Su línea de trabajo es robótica, control automático, e instrumentación.

Manuel Alejandro García González es estudiante de la carrera de Ingeniería Electrónica en el Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua, sus intereses académicos incluyen la robótica, teoría del control, programación de sistemas embebidos y diseño mecánico. Ha participado en competencias nacionales de robótica (InnoBótica TecNM), donde desarrolló robots seguidores de línea.

Edgar Trujillo Preciado es docente de tiempo completo del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica del Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua. Es egresado de la carrera de Ingeniería Industrial en Electrónica y de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica del mismo instituto. Sus áreas de trabajo son redes de computo, sistemas embebidos, ciberseguridad, e internet de las cosas.

Rafael Ruiz Márquez es docente de tiempo completo del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica del Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua. Recibió el grado de Ingeniero Electrónico con especialidad en Sistemas Digitales en el año 2006 por el mismo instituto. Actualmente en proceso de titulación de la Maestría en Ciencias en Ingeniería Electrónica. Es miembro del Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). Áreas de interés: Sistemas digitales, control automático y robótica.