

Diseño y Simulación de Funciones para la Generación de Trayectorias en 2D para su Aplicación con Robots Manipuladores

Rafael Sandoval Rodríguez, Yolanda Eugenia Márquez Gardea, Jonathan Vivar Lozoya, Tecnológico Nacional de México, campus Chihuahua, rafaelsr@chihuahua.tecnm.mx

Resumen - Este trabajo presenta un análisis e implementación de trayectorias en 2D generadas usando segmentos de líneas rectas y semicírculos, y utilizando perfiles de velocidad arbitrarios. Se presenta el procedimiento de diseño, cálculo de parámetros y ejemplo de aplicación, así como una simulación de implementación usando un robot manipulador.

Índice de Términos – Robótica, Planeación de Trayectorias, Simulación, Sistema Didáctico.

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad son muchas las aplicaciones de robots manipuladores en procesos industriales para la fabricación de bienes consumibles, procesamiento y transformación de materiales, e inclusive en aplicaciones domésticas. En muchos de estos procesos es necesario que el robot describa trayectorias sobre una superficie o material de trabajo, y muchas de ellas son trayectorias realizadas en 2D o un plano, como por ejemplo cortes de materiales usando láser, chorro de agua a presión, plasma, entre otras herramientas; también aplicaciones de dispensado de silicones, pinturas u otros recubrimientos. En la figura 1 se muestra el Paquete Integrado de Función de Dispensado (*Integrated Dispensing Function Package, IDFP*) de ABB, utilizado para la aplicación de silicones.

Muchos de los robots industriales que existen en el mercado ya presentan funciones para el desplazamiento de su herramienta en línea recta o semicírculos, sin embargo, es importante el comprender como se pueden implementar estas funciones en un equipo que carezca de esta característica. Ya sea un equipo de tipo didáctico comercial o un prototipo original para la evaluación de algoritmos de control de movimiento.

todo con intenciones didácticas para el alumnado de nivel licenciatura y posgrado.

En la literatura diferentes autores, [Angeles14], [Lewis04], [Lynch17], [Marghitu09], [Schill03], abordan el tema, usamos

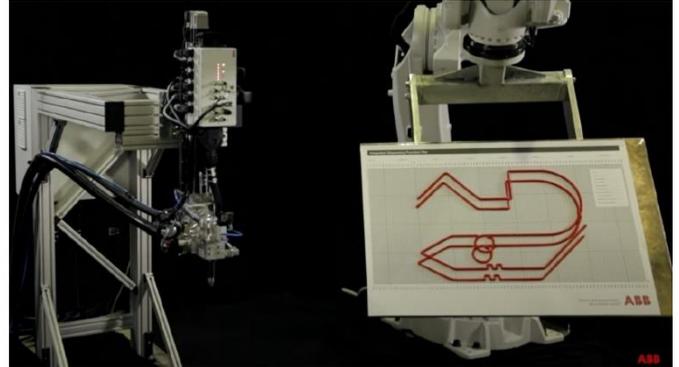


Figura 1. Ejemplo de aplicación del IDFP de ABB.

estas referencias para la realización de este trabajo. Las siguientes secciones describen paso a paso el procedimiento de diseño de estas funciones.

II. PERFILES DE VELOCIDAD

A. Descripción de perfil de velocidad

Por perfil de velocidad nos referimos a la especificación de la velocidad de la herramienta del robot, ya sea con una gráfica o con un arreglo de valores contra el tiempo transcurrido al realizar un movimiento determinado. El perfil más sencillo es el de velocidad constante, esto es, la herramienta parte del reposo e instantáneamente alcanza una velocidad que mantiene constante durante el recorrido. Otro tipo de perfil es de forma trapezoidal, en el cual la herramienta parte del reposo y acelera gradualmente hasta alcanzar una velocidad establecida, después se mantiene a esa velocidad constante por un periodo de tiempo,

y por último desacelera gradualmente hasta llegar de nuevo al reposo. En las siguientes secciones se describen a detalle estos dos perfiles de velocidad.

B. Perfil de Velocidad Constante

El perfil de velocidad constante es el más simple para analizar, en este caso la herramienta del robot se mueve a velocidad constante de un punto inicial a un punto final. Considerando que la herramienta recorre la ruta o camino entre los dos puntos en un tiempo T segundos, la figura 2 muestra una gráfica con los perfiles de posición, velocidad y aceleración de la herramienta del robot contra el tiempo.

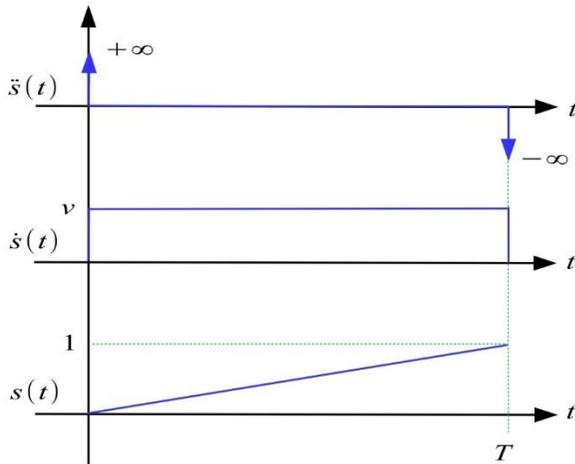


Figura 2. Perfil de velocidad constante.

De la figura, la curva del centro nos representa a la velocidad de la herramienta, con un valor constante v . Para denotar la velocidad usamos la variable $\dot{s}(t)$. Por consiguiente, $s(t)$, que es la integral de la velocidad, nos representa el desplazamiento o posición de la herramienta. Por otra parte, $\ddot{s}(t)$ nos representa a la aceleración, que es la derivada de la velocidad. Como se puede apreciar de la gráfica, para este tipo de movimiento la aceleración de la herramienta tiene un valor infinito al inicio y al final del movimiento, lo que hace que este tipo de perfil, por sí solo, no sea posible de realizar, físicamente hablando. Sin embargo, este movimiento es posible, como veremos más adelante, cuando se concatena con otro perfil de velocidad previo.

Para describir los dos tipos de trayectorias que vamos a analizar más adelante, usaremos una función normalizada $s(t)$ para definir el desplazamiento de la herramienta. Esto es, una expresión $s(t)$ para la posición de la herramienta como función del tiempo, cuyo valor es cero para un tiempo cero, y con un valor de uno para un tiempo T segundos, o tiempo de recorrido de la trayectoria.

Si $s(t) = 1$ para $t = T$ segundos, entonces el área bajo la curva $\dot{s}(t)$, en la figura 2, debe ser igual a uno para $0 \leq t \leq T$, entonces podemos representar la función $\dot{s}(t)$ para un perfil de velocidad constante con la siguiente expresión,

$$\dot{s}(t) = v = \frac{1}{T} \quad (1)$$

La función normalizada $s(t)$ para el desplazamiento la encontramos integrando $\dot{s}(t)$ con respecto al tiempo

$$s(t) = \int \dot{s}(t) dt = \int \frac{1}{T} dt = \frac{t}{T} + C_1 \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

Podemos obtener el valor de la constante de integración C_1 sabiendo que $s(0) = 0$, resultando $C_1 = 0$. Entonces, la función normalizada $s(t)$ para un perfil de velocidad constante resulta

$$s(t) = \frac{t}{T} \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

Tenemos ya una función normalizada para el desplazamiento, la cual la podremos utilizar para cualquiera de los tipos de movimiento que analizaremos más adelante. Como se mencionó previamente, este tipo de perfil no es recomendable de implementar para arrancar o iniciar movimiento dado que requiere cambios de velocidad muy rápidos. Además, el aplicar escalones de entrada a los motores del robot tiende a dañar los sistemas de engranes en sus transmisiones.

C. Perfil de Velocidad Trapezoidal

Ahora consideramos el caso en el cual la velocidad de la herramienta del robot aumenta gradualmente durante t_a segundos hasta alcanzar una velocidad constante v_c , continúa esa velocidad constante durante un tiempo, y termina desacelerando gradualmente durante t_d segundos para completar la trayectoria en T segundos. La figura 3 muestra los perfiles de posición, velocidad y aceleración de la herramienta del robot contra el tiempo.

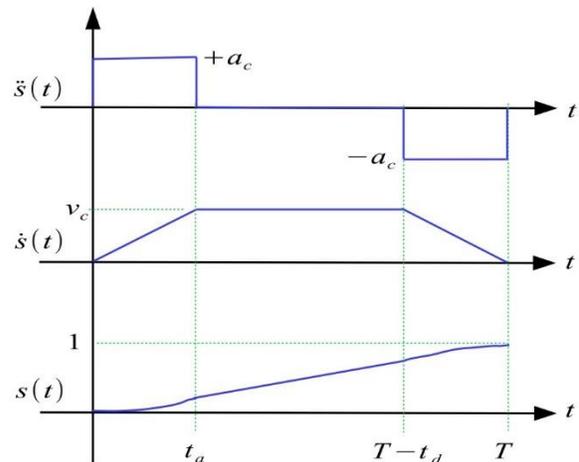


Figura 3. Perfil de velocidad trapezoidal.

La función para la velocidad trapezoidal está definida por la siguiente expresión,

$$\dot{s}(t) = \begin{cases} \frac{v_c}{t_d} t & 0 \leq t < t_a \\ v_c & t_a \leq t < T - t_d \\ -\frac{v_c}{t_d} t + \frac{v_c T}{t_d} & T - t_d \leq t \leq T \end{cases} \quad (4)$$

Para obtener la función normalizada $s(t)$ para el desplazamiento, podemos integrar con respecto del tiempo la función de velocidad $\dot{s}(t)$. Integrando el primer intervalo tenemos,

$$s_1(t) = \int \dot{s}_1(t) dt = \int \frac{v_c}{t_d} t dt$$

$$s_1(t) = \frac{v_c}{2t_d} t^2 + C_2 \quad 0 \leq t < t_a \quad (5)$$

La constante de integración C_2 se puede obtener sabiendo que $s_1(0) = 0$ por tanto $C_2 = 0$. Ahora, integrando el segundo intervalo tenemos,

$$s_2(t) = \int \dot{s}_2(t) dt = \int v_c dt$$

$$s_2(t) = v_c t + C_3 \quad t_a \leq t < T - t_d \quad (6)$$

La constante de integración C_3 la podemos calcular sabiendo que la $s(t)$ es continua en el intervalo definido, por tanto, $s_1(t_a) = s_2(t_a)$, esto es

$$\frac{v_c}{2t_d} t_a^2 = v_c t_a + C_3 \quad (7)$$

Despejando para C_3 tenemos que $C_3 = -\frac{v_c t_a}{2}$. Finalmente, integrando el tercer intervalo tenemos,

$$s_3(t) = \int \dot{s}_3(t) dt = \int \left(-\frac{v_c}{t_d} t + \frac{v_c T}{t_d} \right) dt$$

$$s_3(t) = -\frac{v_c}{2t_d} t^2 + \frac{v_c T}{t_d} t + C_4 \quad T - t_d \leq t \leq T \quad (8)$$

De la figura 3 podemos ver que $s_3(T) = 1$, por tanto,

$$-\frac{v_c}{2t_d} T^2 + \frac{v_c T}{t_d} T + C_4 = 1 \quad (9)$$

Resolviendo para C_4 ,

$$C_4 = 1 - \frac{v_c T^2}{2t_d} \quad (10)$$

Uniendo las tres secciones de la función $s(t)$ tenemos

$$s(t) = \begin{cases} \frac{v_c}{2t_d} t^2 & 0 \leq t < t_a \\ v_c t - \frac{v_c t_a}{2} & t_a \leq t < T - t_d \\ -\frac{v_c}{2t_d} t^2 + \frac{v_c T}{t_d} t + 1 - \frac{v_c T^2}{2t_d} & T - t_d \leq t \leq T \end{cases} \quad (11)$$

El valor de v_c lo podemos obtener del área bajo la curva de $\dot{s}(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$ la cual es igual a uno, entonces

$$1 = \frac{v_c t_a}{2} + v_c (T - t_a - t_d) + \frac{v_c t_d}{2} \quad (12)$$

Resolviendo para v_c resulta,

$$v_c = \frac{2}{2T - t_a - t_d} \quad (13)$$

Tenemos ya los dos perfiles de velocidad más comúnmente utilizados para el movimiento de la herramienta de un robot. En la siguiente sección utilizamos estos perfiles para analizar dos tipos de trayectorias para el movimiento en un plano (2D) de la herramienta de un robot.

III. DEFINICIÓN DE TRAYECTORIAS EN LÍNEA RECTA Y SEMICÍRCULOS

A. Descripción

Como se mencionó previamente, el objetivo principal de este trabajo es contar con un grupo de funciones o expresiones que permitan generar trayectorias que puedan ser alimentadas o programadas en un robot manipulador para que este a su vez pueda mover su herramienta y seguir las trayectorias planeadas. Como se puede apreciar en la figura 4, para un buen número de aplicaciones las trayectorias pueden ser generadas usando líneas rectas y semicírculos.

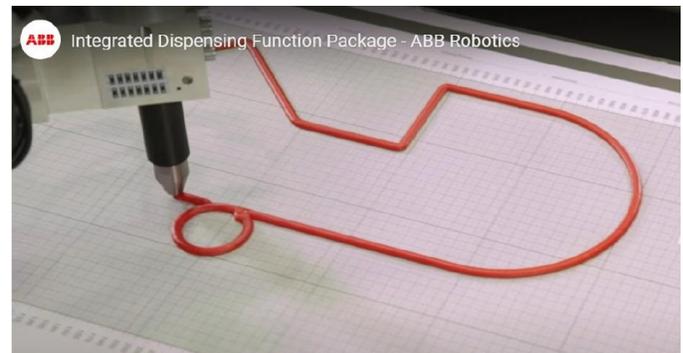


Figura 4. Dispensado de silicón usando líneas y semicírculos.

Sin embargo, es importante que estos segmentos de movimiento sean funciones del tiempo, de ahí que usamos el término de trayectorias. Esto debido a que, por ejemplo, en soldadura de micro alambre, hay que especificar la velocidad de avance de la antorcha de acuerdo al material que se va a soldar y su espesor. En corte láser, la velocidad de avance también es necesario definirla de acuerdo al material a cortar. En la sección anterior se definieron los perfiles de velocidad partiendo de una

velocidad deseada o requerida, y en su caso de los tiempos para acelerar y desacelerar. En esta sección analizamos las expresiones para movimiento en línea recta y movimiento en un semicírculo, como funciones del tiempo y aplicando el perfil de velocidad deseado.

B. Trayectoria en línea recta

La trayectoria de movimiento más simple entre dos puntos es una línea recta, en este caso consideramos un punto inicial $w_i = (x_i, y_i)$ y un punto final $w_f = (x_f, y_f)$, y los relacionamos con una función normalizada $s(t)$ creada con un perfil de velocidad deseado mediante la expresión,

$$w(t) = w_i[1 - s(t)] + w_f s(t) \quad (14)$$

esta función nos brinda la posición del robot sobre la línea recta que une los puntos inicial y final para cualquier instante de tiempo.

Ejemplo 1: Supongamos que deseamos obtener una trayectoria en línea recta que vaya del punto inicial $w_i = (10,20)$ al punto final $w_f = (50,60)$ en un tiempo $T = 10 \text{ seg}$, con un perfil de velocidad constante. La función normalizada $s(t)$ para un perfil de velocidad constante la obtenemos sustituyendo el tiempo de trayectoria $T = 10 \text{ seg}$ segundos en la ecuación 3, resultando

$$s(t) = \frac{t}{10} \quad 0 \leq t \leq 10 \quad (15)$$

sustituyendo esta función normalizada y los puntos inicial y final en la ecuación 14 tenemos,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \left(1 - \frac{t}{10}\right) + \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix} \left(\frac{t}{10}\right) \quad 0 \leq t \leq 10 \quad (16)$$

Evaluando esta trayectoria en Python, la gráfica $x - y$ se muestra en la figura 5.

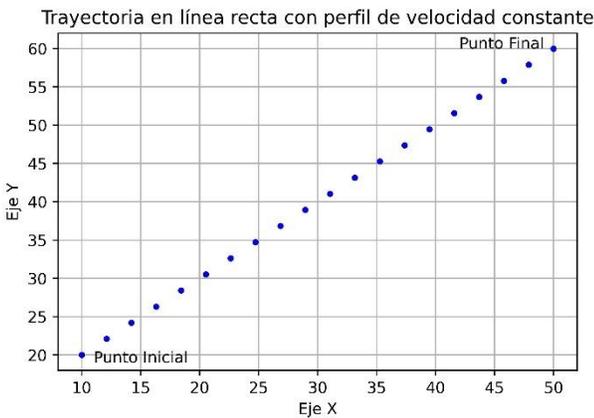


Figura 5. Trayectoria en línea recta con un perfil de velocidad constante.

Para simular la trayectoria se creó un vector de tiempo con valores igualmente espaciados, y con ese vector se evaluó la ecuación 16. Como se puede apreciar en la figura 5, los puntos en la trayectoria representan los valores del tiempo en que fue

evaluada la ecuación 16. Para propósito de visualización se consideraron solo 20 valores, se puede observar que la separación entre los puntos es igual de inicio a fin de la trayectoria, esto es, la distancia recorrida en cada intervalo es la misma, y esto es debido al perfil de velocidad constante. En la siguiente subsección analizamos una trayectoria en semicírculo.

C. Trayectoria en semicírculo.

Para la trayectoria en semicírculo, dada una función normalizada para desplazamiento $s(t)$, podemos obtener el movimiento semicircular desde un punto inicial w_i con ángulo β , a un punto final w_f con ángulo ϕ medido desde β , con un valor positivo para movimientos en sentido contrario a las manecillas del reloj como se muestra en la figura 6.

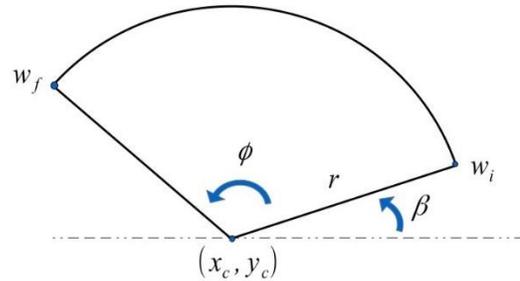


Figura 6. Parámetros para una trayectoria en semicírculo.

Los parámetros necesarios para definir esta trayectoria son las coordenadas del centro del círculo (x_c, y_c) , el radio r , el ángulo de inicio β y el ángulo de recorrido ϕ . Las expresiones que definen el movimiento en los ejes x y y como funciones del tiempo, para una trayectoria semicircular y usando un perfil de velocidad $s(t)$ deseado están dadas por,

$$x(t) = r \cdot \cos(\phi \cdot s(t) + \beta) + x_c \quad (17)$$

$$y(t) = r \cdot \sen(\phi \cdot s(t) + \beta) + y_c$$

Ejemplo 2: Supongamos que se desea realizar una trayectoria en semicírculo en un punto inicial w_i con ángulo $\beta = 45^\circ$, y terminar en un punto w_f describiendo un ángulo $\phi = 270^\circ$ en sentido opuesto a las manecillas del reloj, las coordenadas del centro del semicírculo son $(x_c = 20, y_c = 10)$ y el radio $r = 30$. Las expresiones que describen el movimiento en x y y son,

$$x(t) = 30 \cdot \cos [270^\circ s(t) + 45^\circ] + 20 \quad (18)$$

$$y(t) = 30 \cdot \sen[270^\circ s(t) + 45^\circ] + 10$$

Asumiendo un perfil de velocidad constante con un tiempo de recorrido $T = 20 \text{ seg}$, usamos la ecuación 3 para obtener una función normalizada $s(t) = \frac{t}{20}$. Evaluando estas expresiones en Python, la gráfica $x - y$ se muestra en la figura 7. De manera similar a la trayectoria en línea recta, se creó un vector de tiempo con solo 40 valores para apreciar el espaciamiento entre los puntos. Como se puede ver en la figura, el espaciamiento

entre los puntos es constante, debido también al perfil de velocidad constante.

En la siguiente sección se describe un procedimiento para la obtención de los parámetros de las funciones normalizadas a partir de la trayectoria deseada en un plano, combinando diferentes perfiles de velocidad en cada intervalo o segmento de la trayectoria.

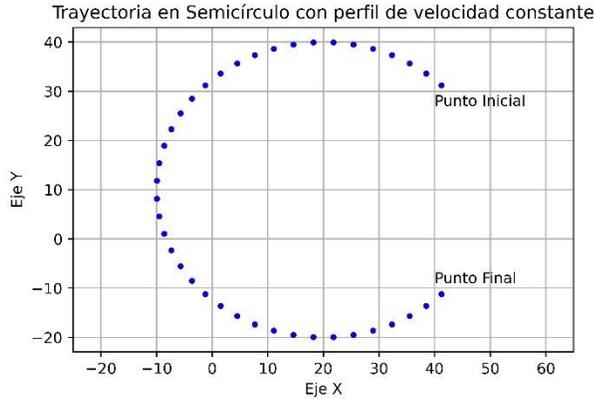


Figura 7. Trayectoria en semicírculo con perfil de velocidad constante.

IV. CÁLCULO DE PARÁMETROS PARA LA DESCRIPCIÓN DE TRAYECTORIAS EN EL PLANO GLOBAL.

A. Descripción.

Como se mencionó previamente, es común expresar una trayectoria en términos de la velocidad deseada de la herramienta, más que en el tiempo de recorrido, ya que es más común contar con las restricciones o especificaciones de velocidad de la herramienta utilizada en la aplicación. Por tanto, partimos de esta información y calculamos los parámetros restantes para la definición de las funciones normalizadas, usando también la información de la trayectoria sobre el plano de trabajo del robot, al que llamamos plano global.

Para el cálculo de parámetros se descompuso el perfil trapezoidal en tres partes, un perfil trapezoidal de aceleración, que cuenta con una sección de rampa ascendente y una sección de velocidad constante, usamos este perfil para iniciar una trayectoria. El segundo perfil es de velocidad constante, que usamos para concatenar un segmento previo con un segmento dado con la misma velocidad. El tercer perfil es llamado perfil trapezoidal de desaceleración, que cuenta con una sección de velocidad constante y una sección de rampa descendente, usamos este perfil para terminar una trayectoria.

B. Perfil trapezoidal de aceleración.

Para el perfil trapezoidal de aceleración mostrado en la figura 8, asumiendo que se conoce la distancia recorrida D_r , el tiempo de aceleración t_a , y la velocidad constante V_{cr} de la herramienta del robot, el tiempo de recorrido T lo podemos obtener sabiendo que el área bajo la curva de velocidad es igual a la distancia recorrida

$$A = D_r = \frac{V_{cr}t_a}{2} + (T - t_a)V_{cr} \quad (19)$$

despejando para T resulta,

$$T = \frac{V_{cr}t_a + 2D_r}{2V_{cr}} \quad (20)$$

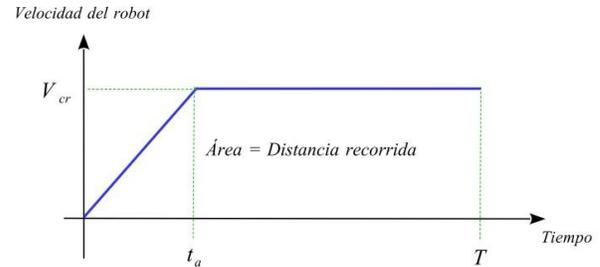


Figura 8. Perfil trapezoidal de aceleración.

C. Perfil de velocidad constante.

Para el perfil de velocidad constante mostrado en la figura 9, asumiendo que se conoce la distancia recorrida D_r , el tiempo de recorrido T lo podemos obtener de,

$$A = D_r = V_{cr}T \quad (21)$$

Donde A , de nuevo es el área bajo la curva de velocidad de la herramienta del robot, resolviendo para T , resulta

$$T = \frac{D_r}{V_{cr}} \quad (22)$$

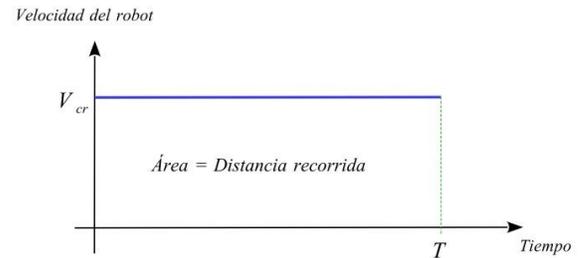


Figura 9. Perfil de velocidad constante.

D. Perfil trapezoidal de desaceleración.

Para el perfil trapezoidal de desaceleración mostrado en la figura 10, asumiendo que se conoce la distancia recorrida D_r , el tiempo de desaceleración t_d , y la velocidad constante V_{cr} de la herramienta del robot, el tiempo de recorrido T lo podemos obtener de,

$$A = D_r = \frac{V_{cr}t_d}{2} + (T - t_d)V_{cr} \quad (23)$$

Despejando para T resulta,

$$T = \frac{V_{cr}t_d + 2D_r}{2V_{cr}} \quad (24)$$

Con los tiempos de recorrido T_i de los i segmentos que componen una trayectoria podemos calcular las correspondientes funciones normalizadas $s_i(t)$. En las siguientes subsecciones realizamos estos cálculos.

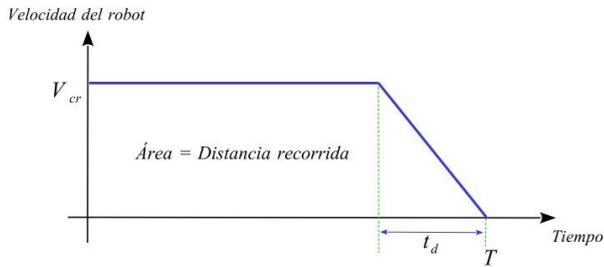


Figura 10. Perfil trapezoidal de desaceleración.

E. Función normalizada para perfil trapezoidal de aceleración.

La figura 11 muestra las gráficas para las funciones $\dot{s}(t)$ y $s(t)$ de un perfil trapezoidal de aceleración, la función $\dot{s}(t)$ puede ser expresada mediante,

$$\dot{s}(t) = \begin{cases} \frac{v}{t_a} t & 0 \leq t < t_a \\ v & t_a \leq t \leq T \end{cases} \quad (25)$$

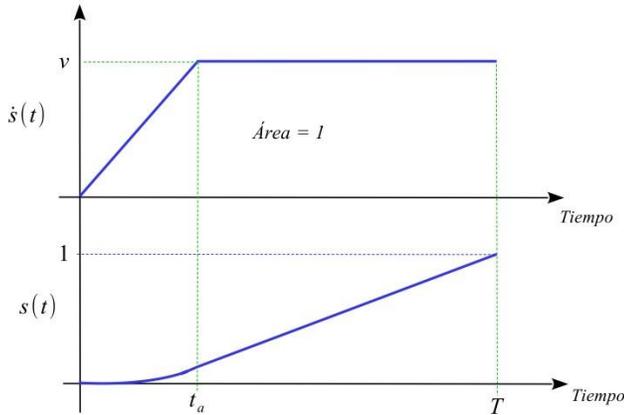


Figura 11. Función normalizada para perfil trapezoidal de aceleración.

La variable v representa el valor constante de la velocidad $\dot{s}(t)$, y puede ser calculado si consideramos que el área bajo la curva de $\dot{s}(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$ es igual a uno,

$$A = 1 = \frac{v t_a}{2} + (T - t_a)v \quad (26)$$

resolviendo para v obtenemos,

$$v = \frac{2}{(2T - t_a)} \quad (27)$$

para encontrar la función normalizada $s(t)$ podemos integrar respecto al tiempo cada sección de $\dot{s}(t)$, para la primera sección,

$$s(t) = \int \frac{v}{t_a} t dt = \frac{v}{2t_a} t^2 + C_1 \quad (28)$$

para obtener el valor de C_1 , de la figura 11 podemos observar que $s(t)$ es igual a cero cuando $t = 0$, sustituyendo $t = 0$ en la ecuación 28 tenemos,

$$s(0) = 0 = \frac{v}{2t_a} (0)^2 + C_1 \quad (29)$$

de aquí $C_1 = 0$. Integrando la segunda sección de la ecuación 25

$$s(t) = \int v dt = v t + C_2 \quad (30)$$

para obtener el valor de C_2 , de la figura 11 podemos observar que la función $s(t)$ es continua, es decir, en el tiempo $t = t_a$ ambas secciones de $s(t)$ tienen el mismo valor, entonces si sustituimos $t = t_a$ en las ecuaciones 28 y 30, y las igualamos

$$\frac{v}{2t_a} (t_a)^2 = v (t_a) + C_2 \quad (31)$$

resolviendo para C_2 tenemos

$$C_2 = -\frac{v t_a}{2} \quad (32)$$

La función normalizada $s(t)$, para el perfil de trapezoidal de aceleración resulta,

$$s(t) = \begin{cases} \frac{v}{2t_a} t^2 & 0 \leq t < t_a \\ v t - \frac{v t_a}{2} & t_a \leq t \leq T \end{cases} \quad (33)$$

donde el valor de v lo tenemos de la ecuación 27.

F. Función normalizada para perfil de velocidad constante

La figura 12 muestra las gráficas para las funciones $\dot{s}(t)$ y $s(t)$ para un perfil de velocidad constante, la función $\dot{s}(t)$ puede ser expresada mediante,

$$\dot{s}(t) = v \quad 0 \leq t \leq T \quad (34)$$

La variable v representa el valor constante de $\dot{s}(t)$, y puede ser calculado si consideramos que el área bajo la curva de $\dot{s}(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$ debe ser igual a uno,

$$A = 1 = v T \quad (35)$$

resolviendo para v ,

$$v = \frac{1}{T} \quad (36)$$

Integrando la ecuación 34 con respecto al tiempo,

$$s(t) = \int v dt = \int \frac{1}{T} dt = \frac{t}{T} + C_3 \quad (37)$$

de la figura 12 podemos ver que $s(0) = 0$, por tanto $C_3 = 0$, así la función normalizada $s(t)$ para el perfil de velocidad constante resulta

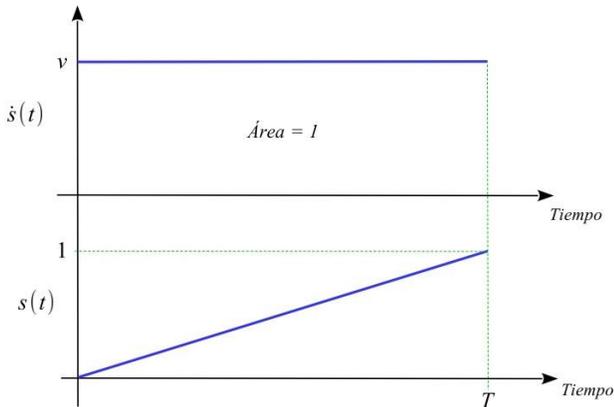


Figura 12. Función normalizada para perfil de velocidad constante.

$$s(t) = \frac{t}{T} \quad 0 \leq t \leq T \quad (38)$$

G. Función normalizada para perfil trapezoidal de desaceleración

La figura 13 muestra las gráficas para las funciones $\dot{s}(t)$ y $s(t)$ la función $\dot{s}(t)$ puede ser expresada mediante,

$$\dot{s}(t) = \begin{cases} v & 0 \leq t < T - t_d \\ -\frac{v}{t_d}t + \frac{vT}{t_d} & T - t_d \leq t \leq T \end{cases} \quad (39)$$

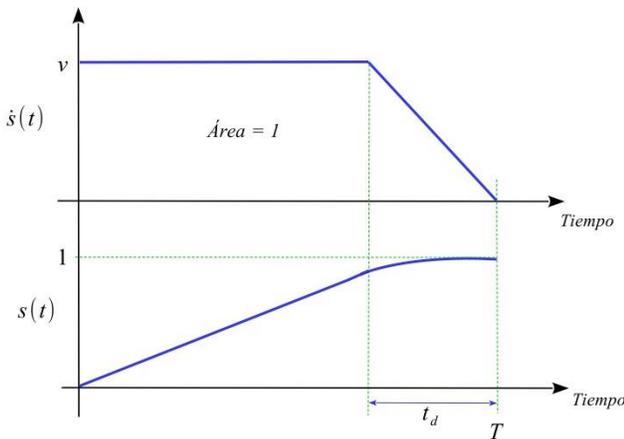


Figura 13. Función normalizada para perfil trapezoidal de desaceleración.

la variable v representa el valor constante de $\dot{s}(t)$, y puede ser calculado si consideramos que el área bajo la curva de $\dot{s}(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$ debe ser igual a uno,

$$A = 1 = (T - t_d)v + \frac{vt_d}{2} \quad (40)$$

resolviendo para v obtenemos,

$$v = \frac{2}{(2T - t_d)} \quad (41)$$

para encontrar la función normalizada $s(t)$ podemos integrar respecto al tiempo cada sección de $\dot{s}(t)$, para la primera sección,

$$s(t) = \int v dt = vt + C_4 \quad (42)$$

para obtener el valor de C_4 , de la figura 13 podemos observar que $s(0) = 0$, entonces sustituyendo $t = 0$ en la ecuación 42 tenemos,

$$s(0) = 0 = v(0) + C_4 \quad (43)$$

de aquí resulta $C_4 = 0$. Integrando la segunda sección de la ecuación 39

$$s(t) = \int \left(-\frac{v}{t_d}t + \frac{vT}{t_d}\right) dt = -\frac{v}{2t_d}t^2 + \frac{vT}{t_d}t + C_5 \quad (44)$$

Tenemos dos opciones para obtener el valor de C_5 , para la primera, de la figura 13 podemos observar que la función $s(t)$ es continua, es decir, en el tiempo $t = T - t_d$ ambas secciones de $s(t)$ tienen el mismo valor, entonces si sustituimos $t = T - t_d$ en las ecuaciones 42 y 44 y las igualamos

$$v(T - t_d) = -\frac{v}{2t_d}(T - t_d)^2 + \frac{vT}{t_d}(T - t_d) + C_5 \quad (45)$$

resolviendo para C_5 tenemos

$$C_5 = -\frac{v}{2t_d}(T - t_d)^2 \quad (46)$$

la segunda opción para calcular el valor de C_5 es que el valor de $s(T) = 1$, entonces sustituyendo $t = T$ en la ecuación 44, tenemos

$$1 = -\frac{v}{2t_d}(T)^2 + \frac{vT}{t_d}(T) + C_5 \quad (47)$$

resolviendo para C_5 ,

$$C_5 = 1 - \frac{vT^2}{2t_d} \quad (48)$$

usando el valor de C_5 de la ecuación 48, la función normalizada $s(t)$ para el perfil trapezoidal de desaceleración resulta,

$$s(t) = \begin{cases} vt & 0 \leq t < T - t_d \\ -\frac{v}{2t_d}t^2 + \frac{vT}{t_d}t + 1 - \frac{vT^2}{2t_d} & T - t_d \leq t \leq T \end{cases} \quad (49)$$

Tenemos ya las expresiones de las funciones normalizadas para un arranque con aceleración uniforme, movimiento a velocidad constante y paro con desaceleración uniforme, con las que podemos realizar trayectorias compuestas que incluyan varios segmentos con líneas rectas y semicírculos. En la siguiente

sección realizaremos un ejemplo de trayectoria compuesta con múltiples segmentos y comprobar su aplicabilidad con un robot manipulador de tipo articulado.

V. EJEMPLO DE TRAYECTORIA COMPUESTA EN EL PLANO GLOBAL.

A. Trayectoria en forma de cápsula.

La figura 14 muestra una trayectoria compuesta en forma de cápsula, consta de dos medios círculos y dos segmentos de línea recta. El primer medio círculo tiene un radio $r_1 = 10\text{cm}$, su centro (x_{c1}, y_{c1}) tiene coordenadas $(20\text{cm}, 30\text{cm})$ y el recorrido comienza en el punto $(20\text{cm}, 20\text{cm})$ con $\beta_1 = -90^\circ$ y termina en el punto $(20\text{cm}, 40\text{cm})$ con un ángulo de recorrido $\phi_1 = 180^\circ$. Ahí inicia el primer segmento en línea recta y termina en el punto $(-20\text{cm}, 40\text{cm})$. El segundo semicírculo que inicia en este último punto, tiene un radio $r_3 = 10\text{cm}$, su centro (x_{c3}, y_{c3}) tiene coordenadas $(-20\text{cm}, 30\text{cm})$, con $\beta_3 = 90^\circ$ y un ángulo de recorrido $\phi_3 = 180^\circ$, y termina en el punto $(-20\text{cm}, 20\text{cm})$ donde inicia un segundo segmento de línea recta que termina en el punto $(20\text{cm}, 20\text{cm})$, donde inició la trayectoria.

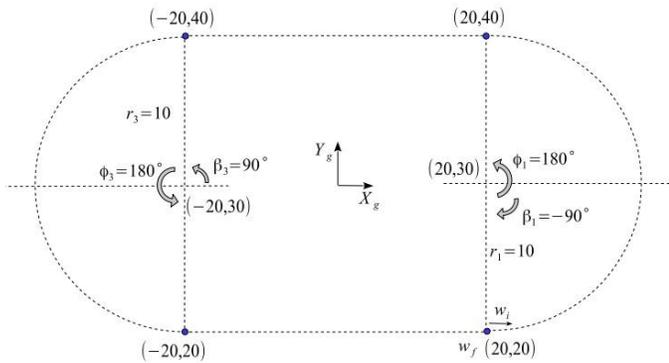


Figura 14. Parámetros de la trayectoria en forma de cápsula.

El arranque de la trayectoria se realiza con un perfil trapezoidal de aceleración, con un tiempo de aceleración $t_a = 3\text{seg}$, hasta alcanzar una velocidad $V_{cr} = 10\text{cm/seg}$ que mantiene constante hasta terminar el segmento semicircular. Para el segundo segmento se usa un perfil de velocidad constante que mantiene la velocidad de $V_{cr} = 10\text{cm/seg}$ que se trae del primer segmento, es decir se concatena el segundo al primer segmento. El tercer segmento aplica también un perfil de velocidad constante para concatenarse a los dos primeros segmentos manteniendo la misma velocidad. Finalmente, el último segmento se implementa con un perfil trapezoidal de desaceleración, manteniendo al inicio la misma velocidad constante de los segmentos previos y en un tiempo $t_d = 3\text{seg}$ desacelera gradualmente hasta llegar a velocidad cero.

SOLUCIÓN: Para obtener los parámetros para el primer segmento, que es un semicírculo, calculamos la distancia recorrida D_{r1} , dados $\phi_1 = \pi\text{rad}$ (180 grados) y $r_1 = 10\text{cm}$, tenemos

$$D_{r1} = r_1\phi_1 = 10\text{cm} \cdot 3.1416\text{rad} = 31.416\text{cm}$$

El tiempo de recorrido T_1 , considerando un perfil trapezoidal de aceleración con tiempo de aceleración $t_a = 3\text{seg}$, lo obtenemos usando la ecuación 20,

$$T_1 = \frac{V_{cr}t_a + 2D_{r1}}{2V_{cr}} = 4.6416\text{seg}$$

Para el segundo segmento, que es una línea recta, la velocidad constante $V_{cr} = 10\text{cm/s}$ del segmento anterior se conserva para este segmento, el punto inicial (x_{i2}, y_{i2}) tiene coordenadas $(20\text{cm}, 40\text{cm})$, mientras que el punto final (x_{f2}, y_{f2}) tiene coordenadas $(-20\text{cm}, 40\text{cm})$, la distancia recorrida D_{r2} la podemos calcular usando

$$D_{r2} = \sqrt{(x_{f2} - x_{i2})^2 + (y_{f2} - y_{i2})^2} = 40\text{cm}$$

El tiempo de recorrido T_2 , considerando un perfil de velocidad constante lo obtenemos usando la ecuación 22,

$$T_2 = \frac{D_{r2}}{V_{cr}} = 4\text{seg}$$

Para el tercer segmento, que es el segundo semicírculo, la velocidad constante $V_{cr} = 10\text{cm/s}$ también se mantiene para este segmento, la distancia recorrida D_{r3} , considerando un radio $r_3 = 10\text{cm}$ y un ángulo de recorrido $\phi_3 = 3.1416\text{rad}$ resulta

$$D_{r3} = r_3\phi_3 = 31.416\text{cm}$$

El tiempo de recorrido T_3 , considerando un perfil de velocidad constante lo obtenemos usando la ecuación 22

$$T_3 = \frac{D_{r3}}{V_{cr}} = 3.1416\text{seg}$$

Para el cuarto segmento, que es la segunda línea recta, el punto inicial (x_{i4}, y_{i4}) tiene coordenadas $(-20\text{cm}, 20\text{cm})$, mientras que el punto final (x_{f4}, y_{f4}) tiene coordenadas $(20\text{cm}, 20\text{cm})$, la distancia recorrida D_{r4} la podemos calcular usando

$$D_{r4} = \sqrt{(x_{f4} - x_{i4})^2 + (y_{f4} - y_{i4})^2} = 40\text{cm}$$

La velocidad constante $V_{cr} = 10\text{cm/s}$ del segmento anterior se conserva al iniciar este segmento, pero al final del segmento se aplica una desaceleración uniforme para llevar la velocidad a cero con un tiempo de desaceleración $t_d = 3\text{seg}$, el tiempo de recorrido T_4 lo podemos obtener usando la ecuación 24,

$$T_4 = \frac{V_{cr}t_d + 2D_{r4}}{2V_{cr}} = 5.5\text{seg}$$

Funciones normalizadas: Una vez que tenemos los tiempos de recorrido para cada segmento podemos ahora calcular las funciones normalizadas. Para el primer semicírculo usamos las

ecuaciones 27 y 33 para encontrar v y $s_1(t)$, respectivamente, con $t_a = 3 \text{ seg}$ y $T_1 = 4.6416 \text{ seg}$, el valor de v resulta

$$v = \frac{2}{(2T_1 - t_a)} = 0.3183$$

sustituyendo los parámetros, la función normalizada $s_1(t)$ queda

$$s_1(t) = \begin{cases} 0.0531t^2 & 0 \leq t < 3 \text{ seg} \\ 0.3183t - 0.4775 & 3 \leq t \leq 4.6416 \text{ seg} \end{cases} \quad (50)$$

Para la primera línea recta con perfil de velocidad constante usamos la ecuación 38 para encontrar la función normalizada $s_2(t)$, aplicando el tiempo de recorrido $T_2 = 4 \text{ seg}$ tenemos,

$$s_2(t) = \frac{t}{4} \quad 0 \leq t \leq 4 \text{ seg} \quad (51)$$

Para el segundo semicírculo con perfil de velocidad constante usamos la ecuación 38 para encontrar la función normalizada $s_3(t)$, aplicando el tiempo de recorrido $T_3 = 3.1416 \text{ seg}$ tenemos,

$$s_3(t) = \frac{t}{3.1416} \quad 0 \leq t \leq 3.1416 \text{ seg} \quad (52)$$

Para la segunda línea recta usamos las ecuaciones 41 y 49 para encontrar v y $s_4(t)$, respectivamente, con $t_d = 3 \text{ seg}$ y $T_4 = 5.5 \text{ seg}$ el valor de v resulta

$$v = \frac{2}{(2T_4 - t_d)} = 0.25$$

sustituyendo los parámetros, la función normalizada $s_4(t)$ queda

$$s_4(t) = \begin{cases} 0.25t & 0 \leq t < 2.5 \text{ seg} \\ -0.0417t^2 + 0.4583t - 0.2604 & 2.5 \leq t \leq 5.5 \text{ seg} \end{cases} \quad (53)$$

Ecuaciones de posición para $x(t)$ y $y(t)$: Las ecuaciones de posición para $x(t)$ y $y(t)$ en los cuatro segmentos resultan como sigue,

Primer segmento (primer semicírculo)

$$\begin{aligned} x(t) &= r_1 \cos(\phi_1 s_1(t) + \beta_1) + x_{c1} \\ y(t) &= r_1 \sen(\phi_1 s_1(t) + \beta_1) + y_{c1} \end{aligned} \quad (54)$$

sustituyendo parámetros

$$\begin{aligned} x(t) &= 10 \cos(180^\circ s_1(t) - 90^\circ) + 20 \\ y(t) &= 10 \sen(180^\circ s_1(t) - 90^\circ) + 30 \end{aligned} \quad (55)$$

donde $s_1(t)$ esta representada en la ecuación 50, y se evalúa en los dos intervalos de tiempo.

Segundo segmento (primera línea recta)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{i2}[1 - s_2(t)] + x_{f2}s_2(t) \\ y(t) &= y_{i2}[1 - s_2(t)] + y_{f2}s_2(t) \end{aligned} \quad (56)$$

sustituyendo parámetros

$$\begin{aligned} x(t) &= 20[1 - s_2(t)] - 20s_2(t) \\ y(t) &= 40[1 - s_2(t)] + 40s_2(t) \end{aligned} \quad (57)$$

donde $s_2(t)$ esta representada en la ecuación 51.

Tercer segmento (segundo semicírculo)

$$\begin{aligned} x(t) &= r_3 \cos(\phi_3 s_3(t) + \beta_3) + x_{c3} \\ y(t) &= r_3 \sen(\phi_3 s_3(t) + \beta_3) + y_{c3} \end{aligned} \quad (58)$$

sustituyendo parámetros

$$\begin{aligned} x(t) &= 10 \cos(180^\circ s_3(t) + 90^\circ) - 20 \\ y(t) &= 10 \sen(180^\circ s_3(t) + 90^\circ) + 30 \end{aligned} \quad (59)$$

donde $s_3(t)$ esta representada en la ecuación 52.

Cuarto segmento (segunda línea recta)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{i4}[1 - s_4(t)] + x_{f4}s_4(t) \\ y(t) &= y_{i4}[1 - s_4(t)] + y_{f4}s_4(t) \end{aligned} \quad (60)$$

sustituyendo parámetros

$$\begin{aligned} x(t) &= -20[1 - s_4(t)] + 20s_4(t) \\ y(t) &= 20[1 - s_4(t)] + 20s_4(t) \end{aligned} \quad (61)$$

donde $s_4(t)$ esta representada en la ecuación 53, y se evalúa en los dos intervalos de tiempo.

Implementación: Una primera opción para evaluar la trayectoria es evaluar cada segmento por separado y al final pegar o adjuntar los vectores resultantes de cada segmento e indexarlos con un vector de tiempo que se compone de la suma de los cuatro tiempos de recorrido.

Una segunda opción es crear un vector de tiempo con la suma de los cuatro tiempos de recorrido y al iniciar cada segmento sustraer el tiempo acumulado para evaluar cada función normalizada desde un tiempo cero hasta su propio tiempo de recorrido, los demás parámetros son evaluados con su correspondiente función normalizada, pero son indexados con el vector de tiempo acumulado.

Para este ejemplo usamos la segunda opción. Usando Python se creó un vector de tiempo con 100 valores para poder visualizar el espaciamiento entre los puntos de evaluación. Las funciones normalizadas se muestran en la figura 15, en esta podemos

observar cómo cada función va de un valor cero a un valor de uno en un tiempo igual a su tiempo de recorrido. La función normalizada del primer segmento inicia con un crecimiento suave cuadrático y en el tiempo de aceleración $t_a = 3 \text{ seg}$ se fusiona con la línea recta correspondiente al periodo de velocidad constante; recordando que estas funciones normalizadas son las integrales de los perfiles de velocidad, así una velocidad constante se refleja en una rampa en la correspondiente función normalizada. Las funciones normalizadas de los dos segmentos siguientes tienen la forma de rampa dados sus perfiles de velocidad constante. La función normalizada del último segmento inicia con una rampa y finaliza convergiendo suavemente al valor de uno en los últimos $t_d = 3 \text{ seg}$.

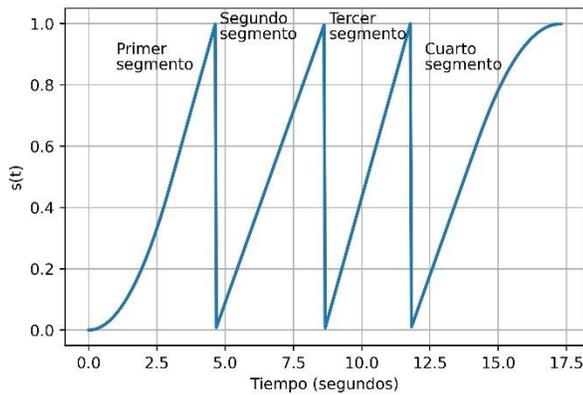


Figura 15. Funciones normalizadas de la trayectoria.

La figura 16 muestra los puntos (x,y) que describen la trayectoria propuesta en los puntos de evaluación, puede observarse en el punto $(20,20)$ (punto de inicio y fin de la trayectoria) la acumulación de puntos al salir y al llegar, debido a los perfiles de aceleración y desaceleración. Después del arranque, puede observarse que los puntos en la trayectoria están igualmente espaciados, debido al perfil de velocidad constante.

figura 19 muestra una vista lateral para el análisis con el método gráfico.

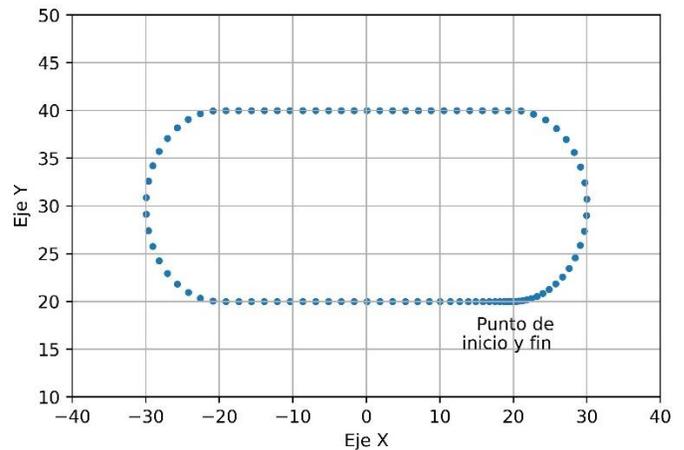


Figura 16. Gráfica de los puntos (x, y) que forman la trayectoria.

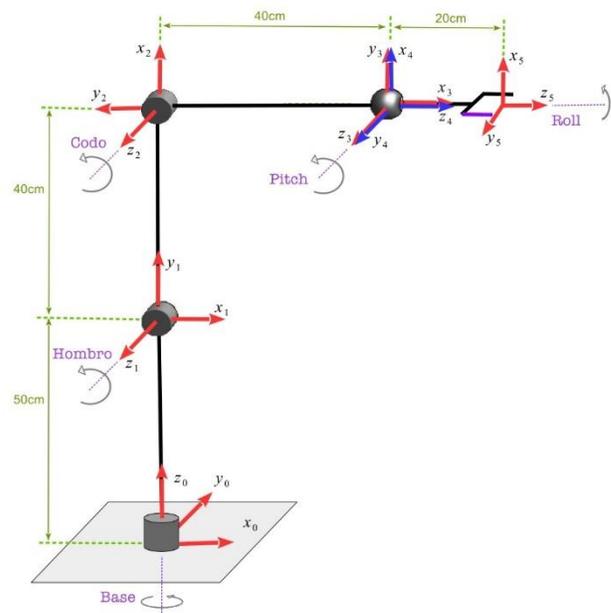


Figura 17. Asignación de sistemas coordenados, Robot Articulado 5GdL.

VI. IMPLEMENTACIÓN EN UN ROBOT ARTICULADO DE 5 GdL.

A. Cinemática Directa del Robot de 5 GdL.

La figura 17 muestra un diagrama con la asignación de sistemas de coordenados a una estructura base de un robot tipo articulado de 5 GdL, este tipo de estructura se presenta en diferentes robots de tipo industrial, así en como robots didácticos. La asignación de sistemas de coordenados se realizó siguiendo el algoritmo de Denavit y Hartenberg, para referencia [1,2,3,4,5]. No se describe a detalle la asignación de los sistemas de coordenados dado que el propósito de este trabajo es presentar el diseño de las funciones para la generación de trayectorias.

La figura 18 muestra los parámetros cinemáticos del robot articulado de acuerdo a la asignación de ejes mostrada en la figura 17. La cinemática inversa se obtuvo aplicando la combinación de un método analítico y un método gráfico. La

n	θ	d	α	a	home
1	θ_1	50cm	90°	0cm	0°
2	θ_2	0cm	0°	40cm	90°
3	θ_3	0cm	0°	40cm	-90°
4	θ_4	0cm	90°	0cm	90°
5	θ_5	20cm	0°	0cm	0°

Figura 18. Parámetros cinemáticos, Robot Articulado 5GdL.

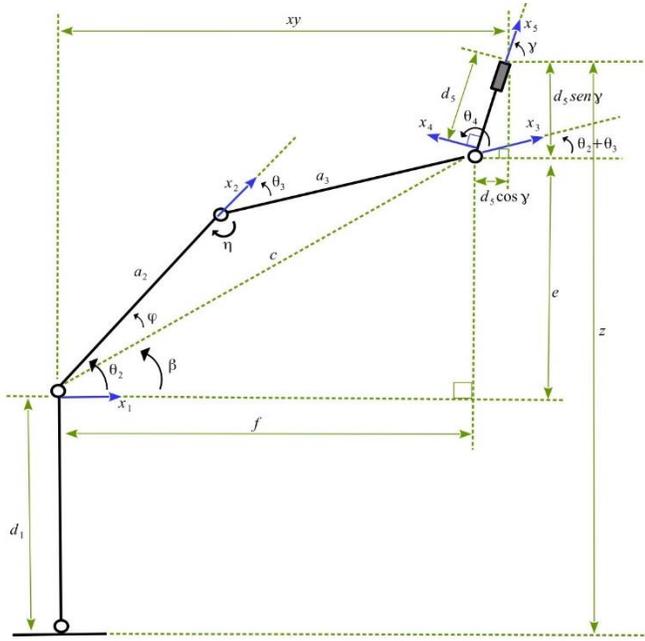


Figura 19. Cinemática inversa, Robot Articulado 5GdL.

Se complementó el código en Python para la generación de la trayectoria en forma de cápsula agregando los análisis cinemáticos directo e inverso del robot articulado para obtener las correspondientes posturas o posiciones de las articulaciones del robot, así como sus velocidades, para describir la trayectoria deseada. Se fijó la orientación de la herramienta apuntando hacia abajo, simulando que está trabajando con una herramienta sobre una superficie paralela al plano $x - y$ y a una altura de 50cm sobre el eje Z . La figura 20 muestra las posturas o posiciones de la articulación de la base (θ_1).

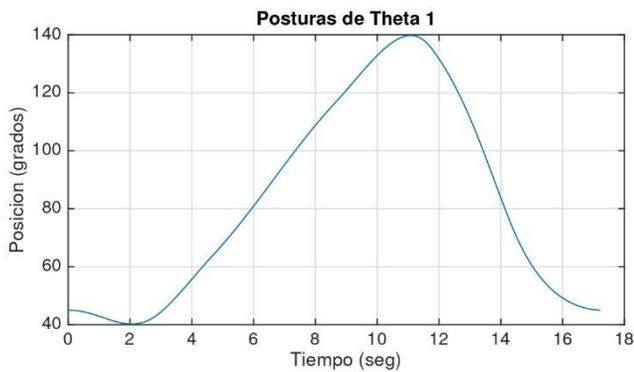


Figura 20. Posturas o posiciones de la articulación de base para la trayectoria en forma de cápsula.

De la figura 20 podemos ver que las posturas de la base cambian gradualmente, o de una manera suavizada, dado el perfil de velocidad trapezoidal con el que se implementa la trayectoria. La figura 21 muestra las posturas de la articulación del hombro (θ_2). La figura 22 muestra las posturas de la articulación del codo (θ_3). La figura 23 muestra las posturas de la articulación del pitch (θ_4).

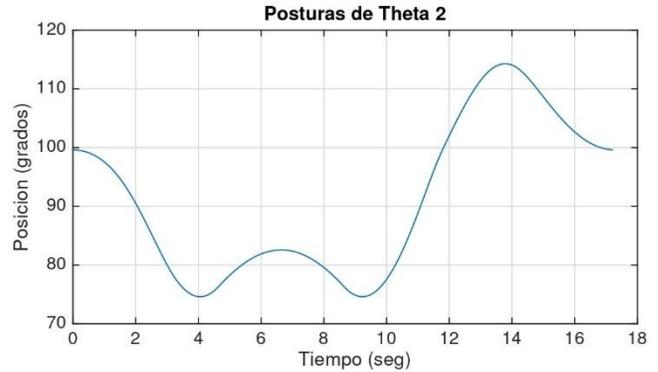


Figura 21. Posturas o posiciones de la articulación de hombro para la trayectoria en forma de cápsula.

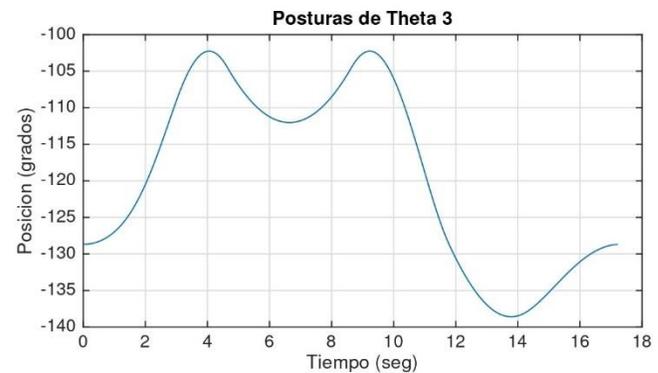


Figura 22. Posturas o posiciones de la articulación del codo para la trayectoria en forma de cápsula.

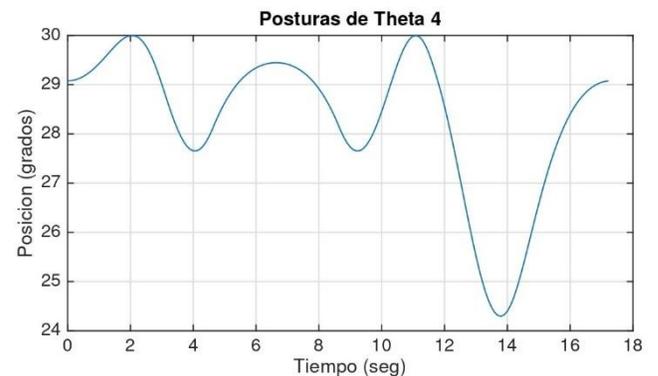


Figura 23. Posturas o posiciones de la articulación del pitch para la trayectoria en forma de cápsula.

De manera similar a la articulación de la base, los perfiles de posición o posturas para las articulaciones de hombro, codo y pitch tienen perfiles suavizados, debido al perfil de velocidad trapezoidal.

Se implementó una animación para visualización de la trayectoria descrita, la figura 24 muestra una imagen de la animación con el robot articulado y su herramienta describiendo la trayectoria.

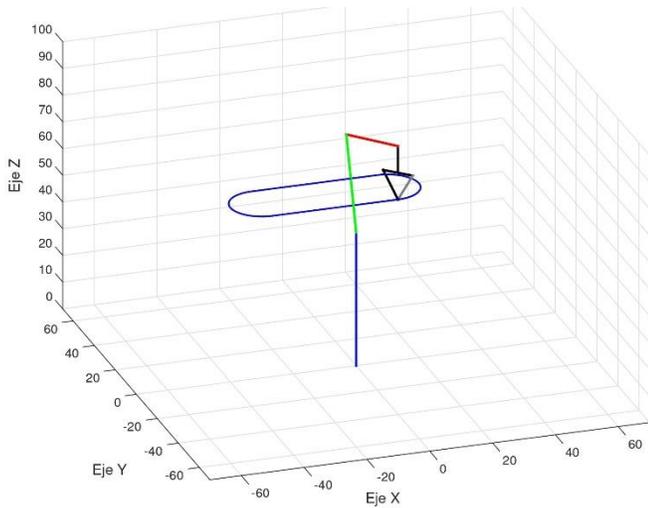


Figura 24. Animación del robot articulado siguiendo la trayectoria en forma de cápsula.

VII. CONCLUSIONES

Se presentó un procedimiento para el diseño de trayectorias en 2D utilizando segmentos de líneas rectas y semicírculos, y su simulación con un robot manipulador tipo articulado. Este procedimiento de análisis de trayectorias forma parte del programa de la materia de Robótica, dentro de la especialidad de Mecatrónica que se imparte en el instituto de adscripción de los autores. Este material se ha estado integrando y complementando a lo largo de varios años de impartición de la materia, con excelentes resultados de comprensión y aplicación por parte de los alumnos de licenciatura.

Como parte de un proyecto de estadías, los autores trabajan en la construcción de un robot manipulador con su estructura impresa en 3D, se han desarrollado sistemas de transmisión innovadores y un sistema de control original. El proyecto se encuentra en un 90\% terminado y se han probado estos algoritmos en las primeras 3 articulaciones del prototipo con excelentes resultados.

REFERENCIAS

- [1] J. Angeles, "Fundamentals of Robotic Mechanical, Systems, Theory, Methods and Algorithms", 4a. ed., Springer, 2014.
- [2] F.L. Lewis, D.M. Dawson, C.T. Abdallah, "Robot Manipulator Control, Theory and Practice", 2a. ed., Marcel Dekker Inc., 2004.
- [3] K.M. Lynch, F.C. Park, "Modern Robotics, Mechanics, Planning and Control", Cambridge University Press, 2017.
- [4] D.B. Marghitu, "Mechanisms and Robot Analysis with MATLAB", Springer, 2009.
- [5] R. Schilling, "Fundamentals on Robotics, Analysis, and Control", Prentice-Hall, 2003.